Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T.22, S.2 (2006), 117–122

KẾT QUẢ MỚI VỀ ĐỒ THỊ HAMILTON TỐI ĐẠI

VŨ ĐÌNH HÒA[1], ĐỖ NHƯ AN[2]

[1]*Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội*

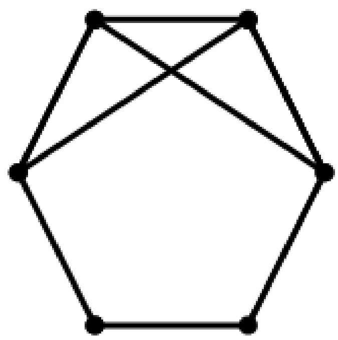
[2]*Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Thủy sản*

Abstract. A graph is called a maximal uniquely Hamiltonian graph if it has the maximum number of edges among the graphs with the same number of vertieces and exact one Hamiltonian cycle. Maximal uniquely Hamiltonian graph was studied by Sheehan [5]. Sheehan proved that maximal uniquely Hamiltonian graph with $n \geq 3$ vertices contains $[\frac{n^2}{4}] + 1$ edges. He confirms that for every $n \geq 3$ there is only maximal uniquely Hamiltonian graph. In this paper, we construct two maximal uniquely Hamiltonian graphs with 9 vertices, and show that for every $n \geq 7$ there are at least $2^{[\frac{n-7}{2}]}$ maximal uniquely Hamiltonian graphs.

Tóm tắt. Một đồ thị được gọi là đồ thị Hamilton tối đại nếu như nó có số cạnh nhiều nhất có thể trong các đồ thị có cùng số đỉnh và có đúng một chu trình Hamilton. Đồ thị Hamilton tối đại được Sheehan [5] nghiên cứu. Sheehan đã chứng minh rằng đồ thị Hamilton tối đại với n đỉnh là duy nhất và có đúng $[\frac{n^2}{4}] + 1$ cạnh. Trong bài này, ta bác bỏ kết quả của Sheehan bằng cách chỉ ra hai đồ thị Hamilton tối đại 9 đỉnh và xây dựng $2^{[\frac{n-7}{2}]}$ đồ thị Hamilton tối đại n đỉnh sai khác nhau qua phép đẳng cấu.

1. MỞ ĐẦU

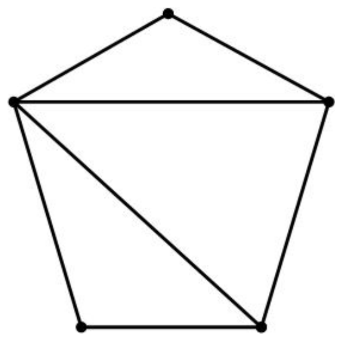
Trong bài báo này, chúng ta chỉ nói đến các đồ thị hữu hạn vô hướng. Mọi ký hiệu và khái niệm ở đây được lấy từ [1]. Cho trước một đồ thị đơn vô hướng G, ta gọi một chu trình C của G là *chu trình Hamilton* nếu như nó đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị G.



Hình 1. Đồ thị có hai chu trình Hamilton

Trong Hình 1 ta có một đồ thị với hai chu trình Hamilton khác nhau. Đồ thị không có chu trình Hamilton với nhiều cạnh nhất đã được nghiên cứu bởi Erdös cũng như một số nhà toán học khác. Nếu đồ thị G có một chu trình Hamilton thì nó được gọi là *đồ thị Hamilton*.

Một đồ thị chỉ có đúng một chu trình Hamilton được gọi là *đồ thị Hamilton tối đại* nếu như nó có nhiều cạnh nhất trong số các đồ thị cùng có số đỉnh và có đúng một chu trình Hamilton. Lớp các đồ thị này được nhiều nhà toán học nghiên cứu, bạn đọc có thể xem thêm [5]. Đồ thị trong Hình 2 là đồ thị Hamilton tối đại 5 đỉnh.



Hình 2. Đồ thị Hamilton tối đại 5 đỉnh

Sheehan [5] đã xác định số cạnh của đồ thị Hamilton tối đại có n đỉnh. Một vấn đề tương tự như vậy đã từng được Erdös giải quyết, khi ông xem xét các đồ thị không có chu trình hamilton. Erdös đặt câu hỏi, trong các đồ thị không có chu trình Hamilton, đồ thị nào có nhiều cạnh nhất. Kết quả của Erdös [4] có thể nêu trong định lý sau.

Định lý 1. (Erdös) *Cho trước một đồ thị đơn vô hướng $G_\ell^n(k)$ với n đỉnh và ℓ cạnh. Nếu mỗi đỉnh P của $G_\ell^n(k)$ có bậc $d(P) \geqslant k$, ở đây k là số tự nhiên thỏa mãn $1 \leqslant k < \dfrac{n}{2}$, thì ta đặt*

$$1 + \max\left\{ \binom{n-1}{2} + \ell^2 \right\} = \ell(k,n).$$

Khi đó ta có:

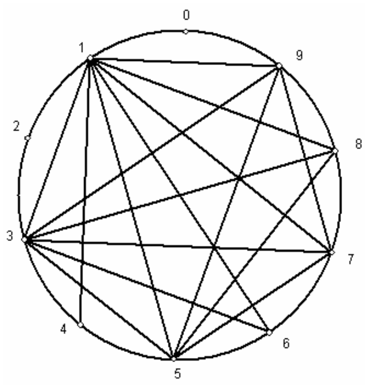
1) *Mọi đồ thị $G_\ell^n(k)$ với $\ell \geqslant \ell(k,n)$ đều là đồ thị Hamilton,*
2) *Tồn tại một đồ thị $G_{\ell(k,n)-1}^n(k)$ không có chu trình Hamilton.*

Đối với đồ thị Hamilton tối đại, Sheehan [5] đã nghiên cứu bài toán tương tự là tìm số cạnh nhiều nhất có thể của đồ thị n đỉnh với duy nhất một chu trình Hamilton. Kết quả tương tự được Barefoot và Entringer [2] nghiên cứu với điều kiện bổ sung là hai đỉnh kề nhau bất kỳ của đồ thị cho trước được nối với nhau bởi một đường Hamilton (đường chứa toàn bộ các đỉnh của đồ thị). Ta gọi một đồ thị như vậy là *đồ thị Hamilton liên thông tối đại* và không nghiên cứu lớp đồ thị đó ở đây. Cho trước một đồ thị G với n đỉnh có duy nhất một chu trình Hamilton C. Ta đánh số các đỉnh trên chu trình Hamilton C theo thứ tự ngược kim đồng hồ là $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (Hình 4). Như vậy các cạnh của C có dạng (v_i, v_{i+1}) (số đỉnh được tính theo $\mathrm{mod}(n)$). Những cạnh không thuộc C được gọi là *đường chéo*. Đường chéo (v_i, v_j) với $i < j$ được nói rằng có *độ dài k*, với $k = \min\{j - i, i + n - j\}$. Trong hình 3, các đường chéo $(1, 8)$ và$(1, 4)$ đều có độ dài 3.

Sheehan đưa ra định lý sau trong [5]:

Định lý 2. (Sheehan) *Đồ thị tối đại với n đỉnh có đúng $[\frac{n^2}{4}] + 1$ cạnh.*

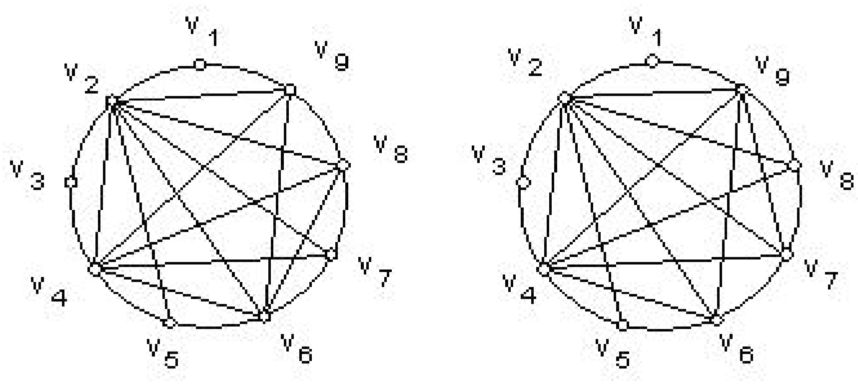
Sheehan [5] cũng chứng minh rằng đồ thị tối đại với n đỉnh là duy nhất và được xác định như sau



Hình 3. Đồ thị Sheehan 10 đỉnh

Ta đánh số các đỉnh trên chu trình Hamilton C theo thứ tự ngược kim đồng hồ là $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Tiếp đó, ta bổ sung tất cả các cạnh dạng (i, j) với i là số lẻ và $j > i$. Khi đó dễ thấy rằng đồ thị thu được là đồ thị chỉ có một chu trình Hamilton và có đúng $[\frac{n^2}{4}] + 1$ cạnh. Đồ thị thu được theo cách xây dựng này được gọi là *đồ thị Sheehan*.

Kết quả trên của Sheehan là sai. Trong Hình 4 ta đưa ra một phản ví dụ với hai đồ thị Hamilton tối đại 9 đỉnh sai khác nhau qua phép đẳng cấu. Hai đồ thị trong Hình 4 là hai đồ thị có duy nhất một chu trình Hamilton. Cả hai đồ thị đều có đúng $[\frac{9^2}{4}] + 1 = 21$ cạnh, là số cạnh nhiều nhất mà một đồ thị với duy nhất một chu trình Hamilton có thể có được. Ngoài ra, chúng không hề đẳng cấu với nhau, do dãy bậc của chúng theo thứ tự $(d(v_1), d(v_2), d(v_3), d(v_4), d(v_5), d(v_6), d(v_7), d(v_8), d(v_9))$ ngược kim đồng hồ trên chu trình Hamilton sẽ là(2,8,2,7,3,6,4,5,5) và (2,8,2,7,3,5,5,4,6). Đỉnh có bậc là 6 trong đồ thị thứ nhất kề với hai đỉnh bậc 3 và 4 trên chu trình Hamilton, còn trong đồ thị thứ hai, đỉnh có bậc 6 chỉ kề với hai đỉnh bậc 4 và 2 trên chu trình Hamilton.



Hình 4. Hai đồ thị Hamilton tối đại 9 đỉnh

2. XÂY DỰNG ĐỒ THỊ HAMILTON TỐI ĐẠI

Ta nêu thuật toán xác định đồ thị Hamilton tối đại n đỉnh như sau. Ta xuất phát từ một chu trình C có n đỉnh. Ta chọn đỉnh x_0 tùy ý trên C và xác định

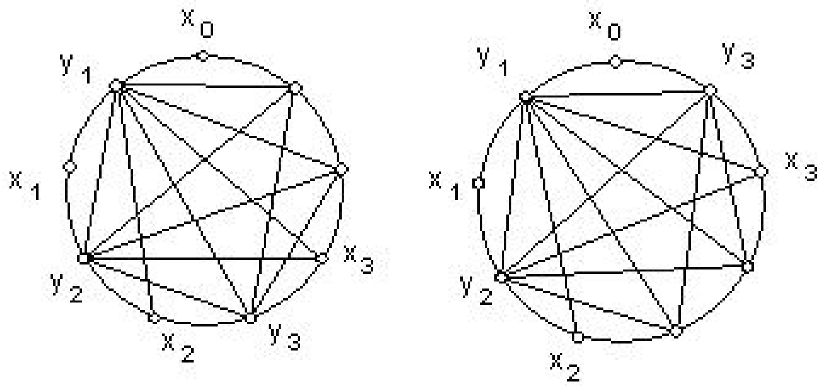
$$X_1 = \{x_0\},$$
$$Y_1 = \emptyset.$$

Nếu tập đỉnh X_i và Y_i đã được xác định, thì ta xác định đỉnh $x_i \notin X_i$ sao cho tồn tại $x' \in X_i$ cách x_i khoảng cách 2 dọc theo chu trình C, và y_i là đỉnh kề với x_i và x' trên C. Tập hợp X_{i+1} và Y_{i+1} được xác định theo quy tắc sau:

$$X_{i+1} = X_i \cup \{x_i\},$$
$$Y_{i+1} = Y_i \cup \{y_i\},$$

với $i = 1, 2, \ldots, [\frac{n}{2}] - 1$. Đồ thị G thu được từ C bằng cách bổ sung các cạnh nối các đỉnh y_i với tất cả các các đỉnh không thuộc $X_{i+1} \cup Y_{i+1}$. Dễ dàng thấy rằng đồ thị Sheehan là đồ thị được xác định theo thuật toán trên khi các đỉnh $x_1, \ldots, x_{[\frac{n}{2}]-1}$ được chọn theo chiều ngược kim đồng hồ dọc theo C. Với $n \leqslant 8$, thuật toán của ta chỉ cho một đồ thị Hamilton tối đại duy nhất và chúng đều là đồ thị Sheehan. Với $n = 9$, thuật toán cho ta hai đồ thị khác nhau như trong Hình 5. Đây chính là hai đồ thị đã được đưa ra trong ví dụ Hình 4. Dễ thấy rằng bậc của các đỉnh của đồ thị G là

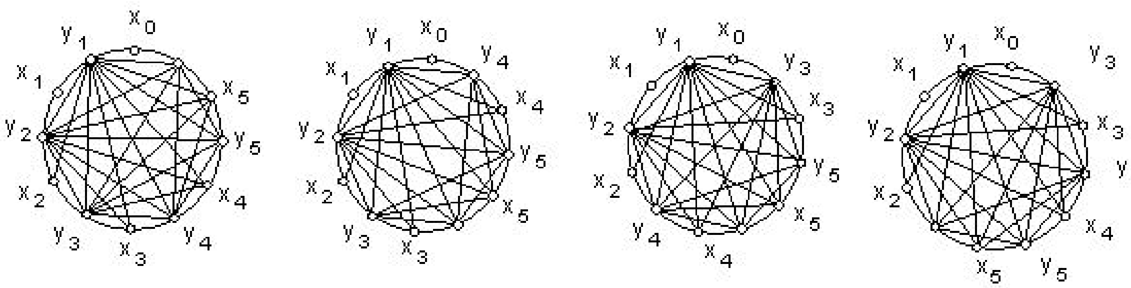
$$d_G(x_0) = 2,$$
$$d_G(x_i) = i + 1 \quad \text{cho mọi } i \leqslant \frac{n}{2} - 1,$$
$$d_G(y_i) = n - i \quad \text{cho mọi } i \leqslant \frac{n}{2} - 1,$$
$$d_G(x) = [\frac{n}{2}] + 1 \quad \text{cho mọi đỉnh còn lại.}$$



Hình 5. Hai đồ thị Hamilton tối đại 9 đỉnh

Định lý 3. *Đồ thị G với n đỉnh thu được theo thuật toán là đồ thị Hamilton tối đại n đỉnh.*
Chứng minh: Trước hết chúng ta thấy G là đồ thị có số cạnh là $[\frac{n^2}{4}] + 1$, vì các đồ thị thu được theo thuật toán đều có số cạnh như nhau, và đồ thị Sheehan là đồ thị có $[\frac{n^2}{4}] + 1$ cạnh được xác định theo thuật toán trên khi các đỉnh $x_1, \ldots, x_{[\frac{n}{2}]-1}$ được chọn theo chiều ngược kim đồng hồ dọc theo C.

Mặt khác, ta sẽ chứng minh rằng C là chu trình Hamilton duy nhất của G bằng cách chứng minh rằng các cạnh không thuộc C (được bổ sung thêm vào đồ thị G trong quá trình thực hiện thuật toán) không nằm trên chu trình Hamilton nào của G cả. Điều này được chứng minh bằng quy nạp theo $i(i = 1, 2, ..., [\frac{n}{2}] - 1)$ rằng các cạnh bổ sung trong quá trình thực hiện thuật toán không thuộc chu trình Hamilton nào cả. Thực vậy, giả sử C' là một chu trình Hamilton của G. Do đỉnh x_0 và x_1 là hai đỉnh bậc 2 nên hai cạnh của chúng phải thuộc C', và như vậy suy ra là các cạnh (x_0, y_1) và (x_1, y_1) là cạnh của C'. Do đó, các cạnh khác (được bổ sung vào khi thực hiện thuật toán) xuất phát từ y_1 không thuộc C'. Ta có thể bỏ các cạnh này ra khỏi đồ thị G để được đồ thị G_1 mà không làm hỏng chu trình C'. Khi đó C' là chu trình Hamilton của G_1 và trong G_1 thì đỉnh x_2 có bậc 2. Hiển nhiên, hai cạnh còn lại của C xuất phát từ x_2 thuộc C' và suy một cách tương tự như lập luận với y_1 là hai cạnh thuộc C xuất phát từ y_2 là hai cạnh thuộc C'... ta lại bỏ các cạnh được bổ sung vào G khi thực hiện thuật toán để thu được đồ thị G_2, cứ lập luận như vậy, ta sẽ thấy tất cả các cạnh thuộc C đều là cạnh của chu trình C', nghĩa là $C = C'$. Vậy C là chu trình Hamilton duy nhất của G. ■



Hình 6. Bốn đồ thị Hamilton tối đại 12 đỉnh

Với $n = 12$, ta có 4 đồ thị Hamilton tối đại như trong Hình 6. Các dãy bậc của đỉnh của chúng một cách tương ứng là

$$(2, 11, 2, 10, 3, 9, 4, 8, 5, 7, 6, 7)$$
$$(2, 11, 2, 10, 3, 9, 4, 7, 6, 7, 5, 8)$$
$$(2, 11, 2, 10, 3, 8, 5, 7, 6, 7, 4, 9)$$
$$(2, 11, 2, 10, 3, 7, 6, 7, 5, 8, 4, 9)$$

Tiếp theo, ta chứng minh định lý sau:

Định lý 4. *Với $n \geqslant 9$ ta có ít nhất $2^{[\frac{n-7}{2}]}$ đồ thị Hamilton tối đại với n đỉnh sai khác nhau qua phép đẳng cấu.*

Chứng minh: Khi thực hiện thuật toán, ta lấy các đỉnh x_1, x_2 theo chiều ngược kim đồng hồ trên C tính từ x_0. Tiếp đó, các đỉnh $x_i, (i = 3, 4, ..., [\frac{n}{2}] - 1)$ được lấy tùy ý, và rõ ràng có 2 cách lựa chọn chúng. Như vậy mỗi cách xác định dãy $x_3, x_4, \ldots, x_{[\frac{n}{2}]-1}$ cho ta một đồ thị Hamilton tối đại theo Định lý 3. Lưu ý rằng với hai cách chọn lựa khác nhau thì ta thu được hai đồ thị khác nhau qua phép đẳng cấu, vì dãy bậc của chúng giống hệt nhau nhưng lại có hoàn toàn khác hẳn nhau trong cách phân bố trên chu trình Hamilton (không hề trùng nhau qua phép quay). Do có $2^{[\frac{n}{2}]-1-3}$ đồ thị thu được do cách lựa chọn dãy $x_3, x_4, \ldots, x_{[\frac{n}{2}]-1}$, cho nên ta có $2^{[\frac{n-7}{2}]}$ đồ thị Hamilton tối đại, mà dễ thấy rằng chúng đôi một sai khác nhau qua phép đẳng cấu. Tóm lại có ít nhất $2^{[\frac{n-7}{2}]}$ đồ thị Hamilton tối đại với n đỉnh sai khác nhau qua phép đẳng cấu. ■

Như vậy, với mỗi $n \geqslant 7$, ta có ít nhất $2^{[\frac{n-7}{2}]}$ đồ thị Hamilton tối đại. Qua kiểm tra thực tế với vài giá trị n, ta không tìm thấy một đồ thị Hamilton tối đại nào khác, cho nên có thể là chỉ có đúng $2^{[\frac{n-7}{2}]}$ đồ thị Hamilton tối đại mà thôi.

Giả thuyết 1. *Có đúng* $2^{[\frac{n-7}{2}]}$ *đồ thị Hamilton tối đại* $n \geqslant 7$ *đỉnh.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] M. Aigner, *Graphentheorie*, Teubner, Stuttgart 1984.

[2] C. A. Barefoot and R. C. Entringer, Extremal maximal uniquely Hamiltonian graphs, *J. Graph Theory* **4** (1) (1980) 93–100.

[3] J. A. Bondy and B. Jackson, Vertices of small degree in uniquely Hamiltonian graphs, http://www.mcs.gold.ac.uk/reports/R971002.html, October 1997.

[4] P. Erdös, Remark on a paper of Pósa, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.* **VII** (1962) 27–229.

[5] J. Sheehan, Graphs with exactly one hamiltonian circuit, *J. Graph Theory* **1** (1977) 37–43.

Nhận bài ngày 8 - 2 - 2005

Nhận lại sau sửa ngày 11 - 8 - 2005