TẠP CHÍ KHOA HỌC TÍNH TOÁN VÀ ĐIỀU KHIỂN TẬP II (1986). Số 4 (13 – 19)

PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG CỰC TIỂU VÀ VẤN ĐỀ LỌC NHIỄU ĐỐI VỚI MỘT LỚP TÍN HIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG DỪNG

PHAN ĐĂNG CẦU

MỞ ĐẦU

Lý thuyết lọc Wiener đã có nhiều ứng dụng trong việc dự báo, làm trơn, lọc nhiễu các tín hiệu ngẫu nhiên. Như ta biết, lọc Wiener chỉ có thể tính toán xấp xỉ được qua các quan sát khi giả thiết dừng, ergodic thỏa mãn. Một điều lạ là trong thực hành ngay cả trường hợp tín hiệu không dừng như tín hiệu địa chấn (xem)[4]), lọc Wiener vẫn được áp dụng có hiệu quả.

Trong bài này chúng tôi nhằm chứng tỏ rằng: đối với một lớp quá trình khá rộng mà không nhất thiết thỏa tính dừng, ergodic, thì xuất phát từ giả thiết sai, cho rằng quá trình đó là dừng ergodic và áp dụng lọc Wiener, ta vẫn dẫn đến kết quả hợp lý theo nghĩa nào đó. Trong trường hợp này lọc tính toán được không phải là xấp xỉ của lọc Wiener, mà là xấp xỉ của lọc tổng bình phương cực tiểu. Chúng tôi cũng chỉ ra ví dụ chứng tỏ khi giả thiết dừng, ergodic không thỏa mãn, lọc tổng bình phương cực tiểu không liên hệ gì với lọc Wiener và cho kết quả tốt hơn.

I – LỌC TỔNG BÌNH PHƯƠNG CỰC TIỂU

1. Một số kí hiệu.

Cho 2 quá trình ngẫu nhiên x_n, y_n, $n = \dots -1, 0, 1, 2, \dots$ Với N là số tự nhiên, p là số nguyên không âm, véc tơ $a = (a_0, a_1, \dots, a_p)'$ ta đặt

$$S_N(a) = \sum_{n=1}^{N} (x_n - a_0 y_n - a_1 y_{n-1} - \dots - a_p y_{n-p})^2$$

$$r_y(l, s) = \frac{1}{N} \sum_{n=s+1}^{N-s} y_{n+s-l} y_n \qquad s, l = 0, 1, 2, \dots, P$$

$$r_y(s) = \frac{1}{N} \sum_{n=s+1}^{N-s} y_{n+s} y_n \qquad s = 0, 1, 2, \dots, P \tag{1}$$

$$r_{xy}(s) = \frac{1}{N} \sum_{n=s+1}^{N-s} x_{n+s} y_n \qquad s = 0, 1, 2, \dots, P$$

$$r_{xy} = (r_{xy}(0), r_{xy}(1), \ldots, r_{xy}(p))'$$

$$R_{xy} = \begin{Vmatrix} r_y(0,0) & r_y(1,0) \ldots & r_y(p,0) \\ r_y(0,1) & r_y(1,1) \ldots & r_y(p,1) \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ r_y(0,p) & r_y(1,P) \ldots & r_y(p,p) \end{Vmatrix}$$

$$[a_0, a_1, \ldots, a_p] = \begin{Vmatrix} a_0 & a_1 \ldots & a_p \\ a_1 & a_0 \ldots & a_{p-1} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_p & a_{p-1}, \ldots & a_0 \end{Vmatrix}$$

$$R = [r_y(0), r_y(1), \ldots, r_y(p)]$$

Lọc TBPCT = Lọc tổng bình phương cực tiểu.
Lọc TBBPCT = Lọc trung bình bình phương cực tiểu.
Lọc Wiener = Lọc tuyến tính trung bình bình phương cực tiểu.

2. Lọc TBPCT.

Định nghĩa: Cho 2 quá trình ngẫu nhiên bất kỳ x_n, y_n, $n = \ldots -1, 0, 1, 2, \ldots$ Với N là số tự nhiên, p là số nguyên không âm. Véc tơ ngẫu nhiên $a = (a_0, a_1, \ldots, a_p)'$ được gọi là lọc TBPCT ước lượng các quan sát $x_1, x_2, \ldots, x_N$ qua các quan sát $y_{-p+1}, y_{-p+2}, \ldots, y_0, y_1, \ldots, y_N$ nếu với mọi véc tơ ngẫu nhiên $b = (b_0, b_1, \ldots, b_p)'$ ta có:

$$S_N(a) \leqslant S_N(b) \tag{2}$$

Ta dễ dàng thấy rằng lọc TBPCT tồn tại với mọi $\omega \in \Omega$, trong đó Ω là không gian xác suất cơ sở và ta có hệ phương trình chuẩn xác định a:

$$R_{xy}a = r_{xy} \tag{3}$$

Khi a thỏa mãn (2) ta đặt:

$$T(x_n) = a_0y_n + a_1y_{n-1} = \ldots a_py_{n-p} \tag{4}$$

Còn với lọc Wiener $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ Tức

$$E(x_n - \alpha_0y_n - \ldots - \alpha_py_{n-p})^2 = \min \tag{5}$$

ta đặt

$$L(x_n) = \alpha_0y_n + \alpha_1y_{n-1} + \ldots + \alpha_py_{n-p} \tag{6}$$

Với lọc TBBPCT ta đặt:

$$M(x_n) = E(x_n/y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-p}) \tag{7}$$

Về hình thức lọc TBPCT giống như cách tính toán thực hành của lọc Wiener, vì $\frac{1}{N}S_N(a)$ thực ra là trung bình mẫu của (5). Qua 2 nhận xét sau đây chúng tôi muốn chứng tỏ rằng khi giả thiết dừng, ergodic không thỏa mãn, lọc TBPCT không liên hệ gì với lọc Wiener.

a) *Ví dụ với quá trình dừng, nhưng không ergodic*:

Ta xét quá trình dừng quen biết $y_n = \cos nw$, $n = 1, 2, \ldots$, ở đây w có phân bố đều trên $[0, 2\pi]$. Ta có: $Ey_n = 0$; $Ey_n^2 = \frac{1}{2}$; $Ey_ny_s = 0$, $n \neq s$ (8)

Đặt $x_n = y_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$

Xét trường hợp $p = 0$. Từ (5) và (8) ta có $\alpha = \alpha_0 = 0$ (9)

Do đó $L(x_n) = 0$ $\quad n = 1, 2, \ldots$ (10)

Theo tiêu chuẩn (2) ta có

$$a = a_0 = \frac{\sum_{n=1}^{N} \cos nw \cos(n+1)w}{\sum_{n=1}^{N} \cos^2 nw} = \cos w + \frac{\sin w[\cos(2N+1)w - \cos w]}{\sin(2N+1)w + (2N-1)\sin w} \quad (11)$$

Vì khi $\sin w \neq 0$, ta có, $\lim_{N\to\infty} a = \cos w$. Hơn nữa $P(\sin w \neq 0) = 1$, do đó

$$\lim_{N\to\infty} a = \cos w \quad \text{h.k.n} \quad (12)$$

So sánh (11), (12) với (9) ta thấy lọc TBPCT luôn luôn là biến ngẫu nhiên không liên hệ gì với lọc Wiener, khi qua giới hạn, giới hạn vẫn là biến ngẫu nhiên không liên hệ gì với lọc Wiener. Bây giờ ta thử so sánh độ « tốt, xấu » của hai lọc với số đo là trung bình bình phương sai số.

– Với lọc Wiener, do (10) ta có: $E(x_n - L(x_n))^2 = \frac{1}{2}$ (13)

– Với lọc TBPCT, khi N=1, ta có $T(x_1) = x_1$, do đó $E(x_1 - T(x_1))^2 = 0$ (14)

Khi N khá lớn, theo (12) $a \approx \cos w$, do đó $T(x_n) \approx \cos w \cos nw$

$$E(x_n - T(x_n))^2 = E\sin^2 w \sin^2 nw < E\sin^2 w = \frac{1}{2} \quad (15)$$

So sánh (14), (15) với (13) ta có $E(x_n - T(x_n))^2 < E(x_n - L(x_n))^2$

Nghĩa là lọc TBPCT cho kết quả tốt hơn lọc Wiener.

b) ***Khi giả thiết dừng không thỏa mãn:***

Trong phần II – của bài này chúng tôi sẽ chỉ ra thí dụ với quá trình không dừng, lọc a hội tụ theo xác suất đến véc tơ hằng λ. Dĩ nhiên véc tơ λ không liên hệ gì với lọc Wiener, vì trong trường hợp này lọc Wiener là phụ thuộc thời gian.

3. Quan hệ giữa lọc TBBPCT, lọc TBPCT và lọc Wiener.

Ta dễ nghĩ rằng lọc TBBPCT là tổng quát nhất, lọc TBPCT vì cho hệ số lọc là ngẫu nhiên do đó tổng quát hơn lọc Wiener, nghĩa là, ta dễ nghĩ rằng hệ thức sau đây là hiển nhiên:

$$E(x_n - M(x_n))^2 \leqslant E(x_n - T(x_n))^2 \leqslant E(x_n - L(x_n))^2 \quad (16)$$

Tuy nhiên, chúng tôi muốn lưu ý độc giả rằng các bất đẳng thức (16) không phải lúc nào cũng đúng. Thí dụ khi x_1 và y_1 độc lập, phương sai dương, ta có:

$$M(x_1) = E(x_1/y_1) = E\,x_1;\ E(x_1 - M(x_1))^2 = \mathrm{Var}\,x_1 > 0$$

Nhưng với N=1, $a = \frac{x_1}{y_1}$ và do đó $T(x_1) = x_1$, ta có

$$E(x_1 - T(x_1))^2 = 0 < E(x_1 - M(x_1))^2$$

Nghĩa là bất đẳng thức thứ nhất của (16) không đúng.

Bất đẳng thức thứ (2) của (16) cũng không phải là hiển nhiên. Vì lọc TBPCT tuy cho phép hệ số lọc là ngẫu nhiên, nhưng lại xét theo tiêu chuẩn tổng bình phương sai số trên quan sát cực tiểu. Do đó mặc dầu lọc này luôn tồn tại, nhưng chưa chắc đã tồn tại kỳ vọng $E(x_n - T(x_n))^2$ và khi tồn tại, chưa chắc đã có bất đẳng thức (16).

Tóm lại, khi giả thiết dừng, ergodic không thỏa mãn (mà trong thực tế ta lại khó kiểm tra điều kiện này) thì ta có thể xem lọc TBPCT như một lọc riêng biệt, không liên hệ gì với lọc Wiener. Như ta thấy, ngay xét theo tiêu chuẩn trung bình bình phương sai số, lọc TBPCT có khi lại cho kết quả tốt hơn lọc Wiener.

Như ta thấy ở phần sau, lọc TBPCT có thể tính toán xấp xỉ qua quan sát với một lớp quá trình khá rộng, không nhất thiết dừng, ergodic.

II - LỌC TBPCT VÀ VẤN ĐỀ LỌC NHIỄU VỚI MỘT LỚP TÍN HIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG DỪNG

1. Trường hợp chung.

Bây giờ ta thử xét việc dùng lọc TBPCT để lọc nhiễu tín hiệu ngẫu nhiên. Trong kỹ thuật, tín hiệu ta thu được thường bị chìm trong nhiễu, nghĩa là

$$y_n = x_n + v_n \tag{17}$$

Trong đó

y_n : tín hiệu thu được.

x_n : tín hiệu có ích.

v_n : nhiễu.

Giả sử y_n có dạng (17) và các giả thiết sau thỏa mãn :

(a) $Ex_n^2 < c < \infty$ (18)

(b) Dãy v_n độc lập, kỳ vọng 0 và với $\varepsilon_0 > 0$ nào đó

$$E|v_n|^{2+\varepsilon_0} < d < \infty \tag{19}$$

(c) $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^{N} \mathrm{Var}u_n = \sigma^2 > 0$ (20)

Như vậy, x_n có thể là tín hiệu tất định hay là biến ngẫu nhiên có kỳ vọng bất kỳ.

Thông thường, nhiễu v_n thường được giả thiết là nhiễu trắng. Ở đây chúng tôi nới rộng giả thiết $\mathrm{Var}v_n = \sigma^2 > 0$ bằng giả thiết (20) là xuất phát từ ý nghĩ sau :

Giả thiết $\mathrm{Var}u_n = \sigma^2$ có nghĩa là độ biến động của nhiễu tại mọi thời điểm đều bằng nhau. Tuy nhiên ta có thể hình dung rằng trong một chuỗi số liệu dài, độ biến động của nhiễu nói chung là như nhau nhưng có thể ở một số ít thời điểm nào đó có thể khác, mặc dầu sự khác biệt đó không quá lớn, tức giả thiết (19) thỏa mãn. Trong thực tế hàng ngày thí dụ tại thời điểm tăng lương hay đổi tiền, trong kỹ thuật thí dụ tại điểm điện thế tăng giảm đột ngột, có sấm chớp... Bổ đề sau đây chứng tỏ giá trị σ^2 có thể được ước lượng khi không có tín hiệu.

Bổ đề 1. Giả sử dãy v_n thỏa (19), (20), khi đó ta có :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} v_n^2 = \sigma^2 \quad \text{h.k.n} \tag{21}$$

Chứng minh : Do (19) ta có

$$\mathrm{Var}v_n = Ev_n^2 < d_1 < \infty \tag{22}$$

Đặt $u_n = v_n^2 - Ev_n^2$, $\delta_0 = \frac{\varepsilon_0}{2}$, theo bất đẳng thức Minkowski ta có

$$E|u_n|^{1+\delta_0} \leqslant \left[(E|v_n|^{2+\varepsilon_0})^{\frac{1}{1+\delta_0}} + Ev_n^2\right]^{1+\delta_0} \leqslant D < \infty$$

Trong đó $D = (d^{\frac{1}{1+\delta_0}} + d_1)$

Theo định lý Markov (xem [2], trang 275), ta có

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u_n \to 0 \qquad \text{theo phân phối.}$$

Nhưng các u_n độc lập, do đó hội tụ trên tương đương với sự hội tụ b.k.n (xem [2], trang 263). Vậy

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} v_n^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Var} v_n = \sigma^2$$

Vậy từ nay về sau ta xem σ^2 là đã biết.

Bổ đề 2. Đặt $r = (r_y(0) - \sigma^2, r_y(1), \ldots, r_y(p))$ (23)

ta có

$$\mathrm{P}\lim_{N\to\infty} (r_{xy} - r) = 0 \tag{24}$$

$$\mathrm{P}\lim_{N\to\infty} [r_y(l, s) - r_y(l - s)] = \mathrm{P}\lim_{N\to\infty} [r_y(l, s) - r_y(s - l)] = 0 \tag{25}$$

Chứng minh: Ta có

$$x_{n+s}y_n = (y_{n+s} - v_{n+s})y_n = y_{n+s}y_n - v_{n+s}(x_n + v_n) = y_{n+s}y_n - v_{n+s}x_n - v_{n+s}v_n$$

Do đó

$$r_{xy}(s) = \frac{1}{N} \sum_{n=-s+1}^{N-s} x_{n+s}y_n = r_y(s) - r_{vx}(s) - r_v(s) \qquad s = 0, 1, \ldots, p \tag{26}$$

Mặt khác ta xét

$$Er_{vx}^2(s) = \frac{1}{N^2} \sum_{n,l} Ev_{n+s}x_n v_{l+s}x_l = \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N} Ev_{n+s}^2 Ex_n^2 \leqslant \frac{d\kappa}{N} \to 0 \quad \text{khi } N \to \infty$$

Theo bất đẳng thức Trê-bư-sep ta có

$$\mathrm{P}\lim_{N\to\infty} r_{vx}(s) = 0 \qquad s = 0, 1, 2, \ldots, p \tag{27}$$

Tương tự ta chứng minh được

$$\mathrm{P}\lim_{N\to\infty} r_v(s) = 0 \qquad s = 1, 2, \ldots, p \tag{28}$$

Áp dụng (21), (26) và (27) ta có

$$\mathrm{P}\lim_{N\to\infty} (r_{xy}(0) - r_y(0) + \sigma^2) = 0 \tag{29}$$

Áp dụng (26), (27) và (29) ta có

$$\mathrm{P}\lim_{N\to\infty} (r_{xy}(s) - r_y(s)) = 0 \qquad s = 1, 2, \ldots, p \tag{30}$$

Vậy ta có (24).

Bằng cách tương tự ta chứng minh được (25).

Áp dụng bổ đề (2), hệ (3) sau khi bỏ đi những lượng hội tụ theo xác suất tới 0 trở thành dạng tính toán được:

$$R\hat{a} = r \tag{31}$$

So sánh với lọc Wiener khi x_n dừng và v_n là nhiễu trắng:

Khi quá trình x_n là dừng, kỳ vọng 0, v_n là nhiễu trắng và độc lập với x_n, lọc Wiener $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p)'$ được xác định bởi hệ phương trình Wiener – Hop:

$$[\varphi_y(0), \varphi_y(1), \ldots, \varphi_y(p)]\alpha = \varphi_{xy} \tag{32}$$

Trong đó

$$\varphi_y(s) = Ey_{n+s}y_n$$

$$\varphi_{xy}(s) = Ex_{n+s}y_n$$

$$\varphi_{xy} = (\varphi_{xy}(0), \varphi_{xy}(1), \ldots, \varphi_{xy}(p))'$$

Sau một vài phép biến đổi (32) trở thành

$$[\varphi_y(0), \varphi_y(1), \ldots, \varphi_y(p)]\alpha = \varphi' \tag{33}$$

Trong đó

$$\varphi = (\varphi_y(0) - \sigma^2, \varphi_y(1), \ldots, \varphi_y(p))'$$

Khi x_n dừng, ergodic, v_n là nhiễu trắng hoàn toàn, nghĩa là v_n độc lập, cùng phân phối, hệ (33) sau khi bỏ đi những lượng hội tụ theo xác xuất tới 0 trở thành:

$$R\widehat{\alpha} = r \tag{34}$$

Trong đó $\widehat{\alpha} = (\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \ldots, \widehat{\alpha}_p)'$

Nghĩa là (34) trùng với (31).

Vậy hệ (31) hay (34) có thể dùng để ước lượng hệ số lọc với những giả thiết khá rộng

Khi x_n dừng, ergodic, v_n là nhiễu trắng hoàn toàn thì $\widehat{a}$ (hay $\widehat{\alpha}$) là ước lượng của lọc Wiener đồng thời là ước lượng của lọc TBPCT. Khi các điều kiện đó không thỏa, thì $\widehat{a}$ là ước lượng của lọc TBPCT.

2. Trường hợp quá trình y_n thỏa tính ergodic

Ta định nghĩa $\mathscr{E}$ là tập hợp các quá trình không nhất thiết dừng nhưng thỏa tính ergodic, cụ thể:

$$\mathscr{E} = \left\{ \{z_n\} \;/\; \exists \operatorname*{Plim}_{N\to\infty} r_z(s) = g_s,\ s = 0,1,\ldots, P;\ \det[g_0, g_1, \ldots, g_p] \neq 0 \right\}$$

Bổ đề sau đây chứng tỏ lớp $\mathscr{E}$ rộng hơn lớp quá trình dừng ergodic

Bổ đề 3. Giả sử x_n là quá trình dạng tự hồi qui, tức x_n thỏa

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \ldots + c_qx_{n-q} = u_n \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ngoài ra các giả thiết sau thỏa mãn:

(a₁) Dãy u_n độc lập, kỳ vọng 0, $E|u_n|^{2+\delta_0} < K < \infty$ với $\delta > 0$ nào đó.

(b₁) $$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} Eu_n^2 = \gamma^2 > 0$$

(c₁) $|c_0 + c_1z + \ldots + c_qz^q| \neq 0$ khi $|z| < 1$.

Khi đó $x_n, y_n \in \mathscr{E}$, trong đó $y_n = x_n + v_n$ và v_n thỏa (19), (20)

Chứng minh: Trong [4] chúng tôi đã chỉ ra $x_n \in \mathscr{E}$, bây giờ chúng tôi sẽ chứng minh $y_n \in \mathscr{E}$. Ta có:

$$y_{n+s}y_n = (x_{n+s} + v_{n+s})(x_n + v_n) = x_{n+s}x_n + x_{n+s}v_n + v_{n+s}x_n + v_{n+s}v_n$$

Do đó

$$r_y(s) = r_x(s) + r_{xv}(s) + r_{vx}(s) + r_v(s) \tag{35}$$

Từ đây ta có

$$\operatorname*{Plim}_{N\to\infty} r_y(0) = f_0 + \sigma^2$$

$$\operatorname*{Plim}_{N\to\infty} r_y(s) = f_s \qquad s = 1, 2, \ldots, p$$

Trong đó $\operatorname*{Plim}_{N\to\infty} r_x(s) = f_s$.

Đặt

$$F = [f_0, f_1, \ldots, f_p], \qquad G = [f_0 + \sigma^2, f_1, \ldots, f_p]$$

Trong [4] chúng tôi đã chứng minh F xác định dương.

Với $x = (x_0, x_1, \ldots, x_p)' \neq 0$ ta có

$$x'Gx = x'Fx + \sigma^2x'x > x'Fx > 0$$

Vậy G xác định dương, do đó $y_n \in \mathscr{E}$

Cũng trong [4] chúng tôi đã chỉ ra vết địa chấn phản xạ có dạng $y_n = x_n + v_n$, trong đó x_n là quá trình dạng tự hồi qui, v_n nhiễu (thường được giả thiết là nhiễu trắng). Vậy vết địa chấn phản xạ thuộc lớp $\mathscr{E}$.

Định lý. Giả sử $y_n = x_n + v_n$ và thỏa (18) — 20). Khi đó

$$\underset{N\to\infty}{\text{Plim}}\ \hat{a} = \underset{N\to\infty}{\text{Plim}}\ a = G^{-1}g \tag{36}$$

và do đó $$\underset{N\to\infty}{\text{Plim}}\ (\hat{a} - a) = 0 \tag{37}$$

Trong đó $$\underset{N\to\infty}{\text{Plim}}\ r_y(s) = g_s$$

$$G = [g_0, g_1, \dots, g_p]$$
$$g = (g_0 - \sigma^2, g_1, \dots, g_p)'$$

Chứng minh: Do $y_n \in \mathscr{C}$, ta có

$$\underset{N\to\infty}{\text{Plim}}\ R_{xy} = \underset{N\to\infty}{\text{Plim}}\ R = G \tag{38}$$

$$\underset{N\to\infty}{\text{Plim}}\ r_{xy} = \underset{N\to\infty}{\text{Plim}}\ r = g \tag{39}$$

Từ (8) ta có

$$G^{-1}R_{xy}a = G^{-1}r_{xy}$$

do đó

$$\underset{N\to\infty}{\text{Plim}}\ G^{-1}R_{xy}a = \underset{N\to\infty}{\text{Plim}}\ G^{-1}r_{xy}$$

Do (38) và (39) ta có

$$\underset{N\to\infty}{\text{Plim}}\ a = G^{-1}g \tag{40}$$

Tương tự từ (31) ta có

$$G^{-1}R\hat{a} = G^{-1}r$$

Sử dụng (38), (39) ta có

$$\underset{N\to\infty}{\text{Plim}}\ \hat{a} = G^{-1}g \tag{41}$$

Vậy ta có (36). Ta có

$$\underset{N\to\infty}{\text{Plim}}\ (\hat{a} - a) = \underset{N\to\infty}{\text{Plim}}\ \hat{a} - \underset{N\to\infty}{\text{Plim}}\ a = G^{-1}g - G^{-1}g = 0$$

Vậy ta có (37). Định lý đã được chứng minh.

Vậy khi $y_n \in \mathscr{C}$, ta có $\hat{a}$ và a xấp xỉ nhau và xấp xỉ véc tơ hàng theo nghĩa hội tụ theo xác suất.

Lời cảm ơn: Cuối cùng tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các giáo sư hướng dẫn khoa học là Gs. Nguyễn Văn Hộ và Gs. Trần Mạnh Tuấn đã hướng dẫn tận tình và cho tác giả những ý kiến thiết thực và quí báu trong quá trình nghiên cứu.

Nhận ngày 21-4-1986

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Anderson T. W.** (1972), Statistical Analysis of Time series John Wiley & sons..
2. **Doob J. L.** (1953), Stochastic processes, John Wiley and sons.
3. **Loeve, Michael** (1977), Probability theory
D. van Nostran Co., In., Newyork.
4. **Phan Đăng Cầu**, Bài toán ngược của phương trình nhân chập hai chuỗi thời gian và ứng dụng — Tạp chí KHTT và ĐK. số 2, 1986.
5. **Srinath M.D., Rajasekaran P. K.** (1979), An introduction to stati statistical signal processing with application, John Wiley & sons.

ABSTRACT

LEAST SQUARE METHOD AND THE FILTERING PROBLEM OF NONSTATIONARY SIGNAL

The author investigate the filtering problem of a signal in the presence of nois, when the signal and the nois are not necessarily stationary, ergodic random processes.