SỰ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM CỦA MỘT LỚP CÁC BÀI TOÁN GIÁ TRỊ BAN ĐẦU DẠNG PHƯƠNG TRÌNH TIẾN HÓA

LÊ NGỌC LĂNG

Trong công trình này chúng ta sẽ nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm của một lớp các phương trình tiến hóa dạng:

$$u' + A(u,u) \ni f, \ u(0) = u_0 \qquad (0,0)$$

và bài toán hỗn hợp đối với hệ thống phương trình đạo hàm riêng phi tuyến

Bài báo được chia làm ba phần. Phần I sẽ trình bày các ký hiệu, định nghĩa và một số kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán tổng quát dạng $\Lambda u + A(u,u) \ni f$. Trong phần II ta xét bài toán giá trị ban đầu dạng phương trình tiến hóa (0.0). Phần cuối cùng III chúng ta chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm cho một lớp các bài toán hỗn hợp đối với hệ thống phương trình đạo hàm riêng phi tuyến mô tả các quá trình truyền và khuyếch tán nhiệt trong các phản ứng hóa học.

I–CÁC KÍ HIỆU, ĐỊNH NGHĨA VÀ GIẢ THIẾT

Giả thử V và H là các không gian Hilbert sao cho V được nhúng com-pắc và nằm trù mật trong H. V^* và H^* là các không gian đối ngẫu của V và H. Đồng nhất H với H^* và H^* với một không gian con của V, khi đó ta có bao hàm thức $V \subset H \subset V^*$.

Tính vô hướng giữa V^* và V cũng như trong H ta kí hiệu $(.,.)$. $\|.\|$, $|.|$ và $\|.\|_*$ lần lượt kí hiệu là chuẩn trong các không gian V,H và V^*. Giả thử $S = [0,T]$ là một đoạn hữu hạn thuộc R^1 và E là một không gian Banach. Như thông thường, ta ký hiệu $L^p(S;E)$ là không gian các hàm bậc p khả tích, xác định trên S và có giá trị trong E; $C(S;E)$ là không gian các hàm xác định và liên tục trên S, có giá trị trong E. Đặt:

$$X := L^2(S;V), \quad Y := L^2(S;H), \quad X^* := L^2(S;V^*).$$

Ký hiệu $\langle . \rangle$ là tích vô hướng giữa X^* và X cũng như trong Y. Khi đó, $\forall f \in X^*$, $\forall u \in X$ (hoặc $\forall f,u \in Y$) ta có:

$$\langle f,u \rangle := \int_S (f(s),u(s))ds.$$

Nếu S được thay bởi đoạn $[0,t] \subset S$ thì ta ký hiệu:

$$X_t := L^2([0,t];V), \ Y_t := L^2([0,t];H), \ X_t^* := L^2([0,t];V^*) \text{ và}$$

$$\langle f,u \rangle_t := \int_0^t (f(s),u(s))ds \quad \forall f \in X_t^*, \ \forall u \in X_t \ (\text{hoặc } \forall f,u \in Y_t).$$

Toán tử đối ngẫu của V và X được ký hiệu bằng J_V và J_X. Giữa J_V và J_X có mối liên hệ được biểu diễn bởi đẳng thức:

$$(J_X v)(t) = J_V v(t) \qquad \forall v \in X, \ t \in S.$$

Để ngắn gọn, ta ký hiệu c là một hằng số dương hữu hạn, nó có thể lấy những giá trị khác nhau. Trong từng trường hợp đánh giá, giá trị cụ thể của c không có ý nghĩa. δ ký hiệu là những hằng số dương có thể chọn bé tùy ý, $c(\delta)$ (có thể lấy các giá trị khác nhau) là những hằng số dương phụ thuộc δ.

Giả thử A là một toán tử thỏa mãn các điều kiện sau:

(I.1) $A \in (H \times V \to V^*)$;

(I.2) Toán tử $u \to A(u,v)$, $\forall v \in V$ bất kỳ, ánh xạ liên tục từ không gian H vào V^*;

(I.3) $\forall u \in H$: $\| A(u,0) \|_* \leqslant M(|u| + 1)$, $M = \text{const}$;

(I.4) $\forall u \in H$, $\forall v_1, v_2 \in V$: $(A(u,v_1) - A(u,v_2)\; v_1 - v_2) \geqslant m \| v_1 - v_2 \|^2$, $m = \text{const} > 0$;

(I.5) $\forall u \in H$, $\forall v_1, v_2 \in V$: $\| A(u,v_1) - A(u,v_2) \|_* \leqslant M \| v_1 - v_2 \|$.

Các toán tử thỏa mãn (I.1)–(I.5) được gọi là toán tử biến dạng (theo nghĩa Lions [1]). Trong [2] chúng ta đã chỉ ra rằng, nếu các điều kiện (I.1)–(I.3) và (I.5) được thỏa mãn, thì $A(u,v) \in X^*$ $\forall u \in Y$, $\forall v \in X$. Điều đó chứng tỏ A là một toán tử ánh xạ từ $Y \times X$ vào X^*.

Đối với toán tử $\wedge$ ta giả thiết thỏa mãn các điều kiện sau:

(II.1) $\wedge \subset X \times X^*$ đơn điệu cực đại ($\wedge$ là toán tử đa trị và được hiểu theo nghĩa của Brézis [3]).

(II.2) $\langle \wedge, u \rangle_t \geqslant a |u(t)|^2 - b$ $\forall u \in D(\wedge)$; $a, b = \text{const} > 0$;

(II.3) Tồn tại tập hợp $W := \{u \mid u \in X;\ \wedge u \in X^*\}$ sao cho $D(\wedge) \subset W \subset C(S;H)$ và nếu trong W ta xác định chuẩn như sau: $\|u\|_W^2 := \|u\|_X^2 + \|\wedge u\|_{X^*}^2$ thì, khi đó, W là một không gian Hilbert được nhúng com-pắc trong Y.

(II.4) $\langle \wedge u - \wedge v, u - v \rangle_t \geqslant a |u(t) - v(t)|^2$ $\forall u, v \in D(\wedge)$.

Xét bài toán sau đây:

$$\wedge u + A(u,u) \ni f,\ u \in D(\wedge). \qquad (1.1)$$

Nếu toán tử A không phụ thuộc vào biến thứ nhất, thì bài toán (1.1) đã được nghiên cứu bởi Brézis [3] và Gajewski – Gröger [4] với toán tử A đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz

Vấn đề tồn tại, duy nhất nghiệm đối với bài toán (1.1) đã được nghiên cứu trong [2] của Lê Ngọc Lăng và ở đó chúng ta đã nhận được các kết quả sau đây:

Định lý 1.1. ([2], định lý 1.) Giả thử điều kiện (I.1 – (I.5) và (II.1) – (II.3) được thỏa mãn. Khi đó, bài toán (1.1) với bất kỳ $f \in X^*$ có ít nhất một nghiệm.

Định lý 1.2. ([2], định lý 2) Ngoài (I.1) – (I.5) và (II.1) – (II.4) giả thử điều kiện sau đây được thỏa mãn:

(I.6) Nếu $u \in D(\wedge) \subset W$ là một nghiệm của (1.1) thì $\varphi_{m_0}(u(.)) \in L^2(S)$, $m_0 \in (0,m)$ với:

$$\varphi_\delta(u) := \max \left\{ 0;\ \sup_{\substack{z \neq 0 \\ z \in V}} \frac{1}{|z|} \left(\| A(u+z,u) - A(u,u) \|_* - \delta \|z\| \right) \right\},\ u \in V.$$

Khi đó, nghiệm của bài toán (1.1) được xác định duy nhất.

Trong những ứng dụng cụ thể, giả thiết (I.6) được xem như tính chất chính quy của nghiệm của bài toán (1.1).

II — BÀI TOÁN GIÁ TRỊ BAN ĐẦU DẠNG PHƯƠNG TRÌNH TIẾN HÓA

Trong phần này chúng ta vẫn sử dụng những kí hiệu và giả thiết như ở I. Đối với $u \in L^1(S;V)$ ta kí hiệu u' là đạo hàm của u theo nghĩa suy rộng trên $]0;T[$ và có giá trị trong V^* [5].

Xét bài toán giá trị ban đầu dạng phương trình tiến hóa sau đây:

$$u' + A(u,u) = f,\ u(0) = u_0 \in H,\ u \in X,\ u' \in X^* \qquad (2,1)$$

trong đó $A \in (Y \times X \to X^*)$, $f \in X^*$, $u_0 \in H$ cho trước.

Để sử dụng được kết quả ở I, chúng ta định nghĩa $\wedge \subset X \times X^*$ như sau

$$\wedge := \{[u, u'] \mid u \in X,\ u' \in X^*,\ u(0) = u_0 \in H\} \qquad (2.2)$$

Bổ đề 2.1. Toán tử $\wedge \subset X \times X^*$ định nghĩa như trong (2.2) thỏa mãn tất cả điều kiện (II.1) – (II.4).

Chứng minh: 1) $\forall u, v \in D(\wedge)$ nghĩa là $u, v \in X$; $u', v' \in X^*$ và $u(0) = v(0) = u_0$, ta có

$$\langle \Lambda u - \Lambda v,\ u - v\rangle = \int\limits_S (u'(s) - v'(s),\ u(s) - v(s))\,ds = \frac{1}{2}|u(T) - v(T)|^2 \geq 0.$$

Chứng tỏ $\Lambda \subset X \times X^*$ đơn điệu. Mặt khác, bài toán giá trị ban đầu:
$u' + J_x u = f,\ u(0) = u_0,\ u \in X,\ u' \in X^*$
đối với $f \in X^*$ cho trước luôn có nghiệm [5[. Từ đó, dựa vào kết quả của Browder [6] ta suy ra được tính chất đơn điệu cực đại của Λ. Điều kiện (II.1) được thực hiện.
2) $\forall u,\ v \in D(\Lambda)$ và $\forall t \in S$ ta có:

$$\langle \Lambda u - \Lambda v,\ u - v\rangle_t = \int\limits_0^t (u'(s) - v'(s),\ u(s) - v(s))\,ds = \frac{1}{2}|u(t) - v(t)|^2,$$

chứng tỏ điều kiện (II.4) được thỏa mãn.
3) $\forall u \in D(\Lambda)$, $\forall t \in S$ ta có:

$$\langle \Lambda u,\ u\rangle_t = \int\limits_0^t (u'(s),\ u(s))\,ds = \frac{1}{2}(|u(t)|^2) - |a|^2),$$ điều kiện (II.2) được thỏa mãn.

4) Tập hợp $W := \{u \mid u \in X,\ \ \Lambda u \in X^*\} = \{u \mid u \in X,\ u' \in X^*\}$ với chuẩn $\|u\|_W^2 := \|u\|_X^2 + \|u'\|_{X^*}^2$ theo [6] là một không gian Hilbert được nhúng com-pắc và nằm trù mật trong $L^2(S;\ H) = Y$. Mặt khác, rõ ràng ta có $D(\Lambda) \subset W$. Chứng tỏ điều kiện (II.3) được thỏa mãn.

Với toán tử $\Lambda \subset X \times X^*$ được định nghĩa như trong (2.2) ta có thể viết bài toán (2.1) dưới dạng:

$$\Lambda u + A(u,\ u) \ni f,\ u \in D(\Lambda),$$

và từ các định lý 1.1, 1.2 ta suy ra định lý:

Định lý 2.1. Giả thử A là toán tử thỏa mãn những điều kiện (I.1) – (I.6). Khi đó, bài toán giá trị ban đầu dạng phương trình tiến hóa

$$u' + A(u,\ u) = f,\ u(0) = u_0 \in H,\ u \in W := \{u \mid u \in X,\ u' \in X^*\} \qquad (2.3)$$

với mọi $f \in X^*$ cho trước, có duy nhất một nghiệm.

III–BÀI TOÁN HỖN HỢP ĐỐI VỚI HỆ THỐNG PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG PHI TUYẾN

Giả thử $G \subset R^N$ là một miền giới nội, có biên ∂G đủ trơn. Với mỗi $u = (u_1,\ \ldots,\ u_r)$ ta xét bài toán hỗn hợp sau đây:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}[b(u,\ \operatorname{grad} u)] + \gamma\Delta^2 u = f(u) \quad \gamma > 0, \quad u \in G \times S & (3.1) \\ u = 0 \text{ và } \Delta u = 0 \text{ trên } \partial G; & (3.2) \\ u\big|_{t=0} = u_a = (u_{1a},\ \ldots,\ u_{ra}) & (3.3) \end{cases}$$

trong đó $u = u(x,\ t) = (u_1(x,\ t),\ \ldots,\ u_r(x,\ t))$ là hàm số phải tìm; $f \in (R^r \to R^r)$, $b \in (R^r \times R^{rN} \to R^{rN})$ và u_a là những hàm số và giá trị ban đầu cho trước.

Chú ý 3.1. Bài toán (3.1)–(3.3) mô tả quá trình truyền và khuyếch tán nhiệt trong một số các phản ứng hóa học [7].
Đối với bài toán này ta chọn:

$$V := (H^2(G) \cap H_0^1(G))^r; \quad H := (L^2(G))^r.$$

Ký hiệu $(.,.)$ là tích vô hướng trong các không gian H và R^r cũng như giữa V^* và V; $|.|$, $\|.\|$, $\|.\|_*$ là các chuẩn trong các không gian H, V và V^*; $|\xi|$ là độ dài của vécto $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_r)$. Chuẩn trong các không gian H và V được định nghĩa như sau:

$$|u|^2:=\int_G |u|^2\,dx=\|u\|^2_{(L^2(G))^r},\ \|u\|^2:=\int_G |\Delta u|^2\,dx.$$

Rõ ràng V và H là các không gian Hilbert và V được nhúng com-pắc và nằm trù mật trong H. Hơn nữa $\forall u\in V$ ta có $|u|\leqslant c\|u\|$.

Để chuyển bài toán (3.1) – (3.3) về dạng (2.3) ta đặt:

$$a(u,v,h):=\int_G \{(b(u,\operatorname{grad}v),\operatorname{grad}h)+\gamma(\Delta v,\Delta h)-(f(u),h)\}\,dx \qquad (3.4)$$

Nhờ công thức Green, dễ dàng thấy rằng, bài toán giá trị ban đầu

$$\begin{cases}(u',h)+a(u,u,h)=0 \text{ đối với hầu hết } t\in S,\ u(0)=u_0\in H,\\ u\in W:=\{u\mid u\in X=L^2(S;V),\ u'\in X^*=L^2(S;V^*)\}\end{cases} \qquad (3.5)$$

là bài toán tổng quát (theo nghĩa Lions – Lattès [8]) của bài toán hỗn hợp (3.1) - (3.3).

Định nghĩa 3.1. Mỗi một nghiệm của bài toán giá trị ban đầu (3.5) được gọi là nghiệm suy rộng của bài toán hỗn hợp (3.1) – (3.3).

Đối với các hàm số b và f ta giả thiết thỏa mãn các điều kiện sau:

(III.1). $\forall\xi\in R^r,\ \forall\zeta_1,\zeta_2\in R^{rN}$: $\quad |b(\xi,\zeta_1)-b(\xi,\zeta_2)|\leqslant M|\zeta_1-\zeta_2|$
$\quad |b(\xi,0)|\leqslant M(|\xi|+1)$.

(III.2). $\forall\xi\in R^r,\ \forall\zeta_1,\zeta_2\in R^{rN}$: $\quad (b(\xi,\zeta_1)-b(\xi,\zeta_2),\zeta_1-\zeta_2)\geqslant m|\zeta_1-\zeta_2|^2$.

(III.3). $f\in R^r\to R^r$ và $\forall\xi\in R^r$: $\quad |f(\xi)|\leqslant M(|\xi|+1)$.

(III.4). $\forall\xi,\eta\in R^r,\ \forall\zeta\in R^{rN}$: $\quad |b(\xi,\zeta)-b(\eta,\zeta)|\leqslant M|\xi-\eta|\,|\zeta|$
$\quad |f(\xi)-f(\zeta)|\leqslant M|\xi-\zeta|$.

Bổ đề 3.1. Giả thử các điều kiện (III.1) và (III.3) được thỏa mãn. Khi đó, một toán tử $A\in(H\times V\to V^*)$ hoàn toàn được xác định qua đẳng thức:

$$a(u,v,h):=(A(u,v),h)\quad \forall u\in H,\ \forall v,h\in V. \qquad (3.6)$$

Hơn nữa ta có: $\quad |(A(u,v),h)|\leqslant c(|u|+\|v\|+1)\|h\|$

$$\|A(u,0)\|_*\leqslant c(|u|+1).$$

Chứng minh. $\forall u\in H,\ \forall v,h\in V$ ta có:

$$|a(u,v,h)|=\left|\int_G\{(b(u,\operatorname{grad}v),\operatorname{grad}h)+\gamma(\Delta v,\Delta h)-(f(u),h)\}\,dx\right|$$

$$\leqslant\left(\int_G|b(u,\operatorname{grad}v)|^2dx\right)^{\frac12}\left(\int_G|\operatorname{grad}h|^2dx\right)^{\frac12}+\gamma\left(\int_G|\Delta v|^2dx\right)^{\frac12}\cdot$$

$$\times\left(\int_G|\Delta h|^2dx\right)^{\frac12}+\left(\int_G|f(u)|^2dx\right)^{\frac12}\left(\int_G|h|^2dx\right)^{\frac12}$$

$$\leqslant c\left\{\left(\int_G|b(u,\operatorname{grad}v)-b(u,0)|^2dx\right)^{\frac12}+\left(\int_G|b(u,0)|^2dx\right)^{\frac12}\right\}.\left(\int_G|\operatorname{grad}h|^2dx\right)^{\frac12}+$$

$$+\gamma\left(\int_G|\Delta v|^2dx\right)^{\frac12}+\left(\int_G|\Delta h|^2dx\right)^{\frac12}+\left(\int_G|f(u)|^2dx\right)^{\frac12}\left(\int_G|h|^2dx\right)^{\frac12}$$

$$\leqslant c(|u| + \|v\| + 1)\|h\|.$$

Đặc biệt, nếu $v = 0$ ta có: $\|A(u, 0)\|_* \leqslant c(|u| + 1)$

Bổ đề 3.1 được chứng minh.

Chú ý 3-2. Từ bổ đề 3.1 ta suy ra rằng, bài toán giá trị ban đầu (3.5) tương đương với bài toán giá trị ban đầu sau:

$$u' + A(u, u) = 0, \ u(0) = u_0 \in H, \ u \in W. \tag{3.7}$$

Bổ đề 3.2. Giả thử các điều kiện (III.1) và (III.3) thỏa mãn. Khi đó $\forall u, u_n \in H$, $v \in V$ và $u_n \to u$ trong H khi $n \to \infty$ ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \int_G |b(u_n, \operatorname{grad} v) - b(u, \operatorname{grad} v)|^2 dx = 0.$$

Chứng minh. Đặt $d(x, \xi) := b(\xi, \operatorname{grad} v(x))$. Rõ ràng hàm số $x \to d(x, \xi)$ đo được trên G đối với $\forall \xi \in R^r$ và hàm số $\xi \mapsto d(x, \xi)$ liên tục trên R^r đối với hầu hết $x \in G$. Mặt khác ta có:

$|d(x, \xi)| \leqslant M(|\operatorname{grad} v(x)| + \xi| + 1)$, trong đó $a(.) = M(|\operatorname{grad} v(.)| + 1) \in L^2(S)$.

Từ đó suy ra rằng, toán tử Nemeski [0]

$(D\xi)(x) := d(x, \xi(x)) = b(\xi(x), \operatorname{grad} v(x))$ ánh xạ liên tục từ $(L^2(G))^r$ vào $(L^2(G))^{rN}$. Nghĩa là, từ $u_n \to u$ trong H khi $n \to \infty$ và $v \in V$ ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \|(Du_n)(x) - (Du)(x)\|^2_{(L^2(G))^{rN}} = \lim_{n\to\infty} \int_G |b(u_n, \operatorname{grad} v) - b(u, \operatorname{grad} v)|^2 dx = 0.$$

Bổ đề 3.3. Giả thử các điều kiện (III.1) và (III.3) thỏa mãn. Khi đó $\forall u, u_n \in H$, $k_n \to u$ trong H khi $n \to \infty$ ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \int_G |f(u_n) - f(u)|^2 dx = 0.$$

Chứng minh. Đặt $d(x, \xi) := f(\xi) \in (R^r \to R^r)$. Rõ ràng, điều kiện Carathéodory đối với $d(x, \xi)$ thỏa mãn và

$|d(x, \xi)| \leqslant M(|\xi| + 1)$.

Do đó, toán tử Nemeski $(D\xi)(x) := d(x, \xi(x)) = f(\xi(x))$ ánh xạ liên tục từ $(L^2(G))^r$ vào chính nó. Nghĩa là, từ $u_n \to u$ trong H khi $n \to \infty$ ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \|(Du_n)(x) - (Du)(x)\|^2_{(L^2(G))^r} = \lim_{n\to\infty} \int_G |f(u_n) - f(u)|^2 dx = 0.$$

Bổ đề 3, 4. Giả thử các điều kiện (III.1) và (III.3) thỏa mãn. Khi đó, toán tử $A(.,v) \in (H \to V^*)$ $\forall v \in V$ là liên tục.

Chứng minh. Giả thử $u_n \to u$ trong H khi $n \to \infty$. Khi đó $\forall v, h \in V$ ta có:

$$(A(u_n, v) - A(u, v), h) = \int_G \{(b(u_n, \operatorname{grad} v) - b(u, \operatorname{grad} v), \operatorname{grad} h) - (f(u_n) - f(u), h)\} dx$$

$$\leqslant \left(\int_G |b(u_n, \operatorname{grad} v) - b(u, \operatorname{grad} v)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \|h\| + \left(\int_G |f(u_n) - f(u)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \|h\|$$

Sử dụng bổ đề 3.2 và 3.3 ta suy ra điều phải chứng minh.

Bổ đề 3.5 Giả thử các điều kiện (III.1) – (III.2) thỏa mãn. Khi đó $\forall u \in H$, $\forall v_1, v_2 \in V$ ta có:

$$(A(u, v_1) - A(u, v_2), v_1 - v_2) \geqslant \gamma \| v_1 - v_2 \|^2.$$

Chứng minh: $\forall u \in H$, $\forall v_1, v_2 \in V$ ta có:

$$(A(u,v_1) - A(u, v_2), v_1 - x_2) = \int_G \{ (b(u, \operatorname{grad} v_1) - b(u, \operatorname{grad} v_2), \operatorname{grad}(v_1 - v_2)) +$$
$$+ \gamma(\Delta(v_1 - v_2), \Delta(v_1 - v_2)) \} dx$$

$$\geqslant m \int_G |\operatorname{grad}(v_1 - v_2)|^2 dx + \gamma \int_G |\Delta(v_1 - v_2)|^2 dx$$

$$\geqslant \gamma \| v_1 - v_2 \|^2.$$

Bổ đề 3.6. Giả thử các điều kiện (III. 1) và (III. 4) thỏa mãn. Khi đó, $\forall u \in H$, $\forall v_1, v_2 \in V$ ta có: $\| A(u, v_1) - A(u, v_2) \|_* \leqslant c \| v_1 - v_2 \|$.

Chứng minh:

$$(A(u, v_1) - A(u, v_2), h) = \int_G \{ (b(u, \operatorname{grad} v_1) - b(u, \operatorname{grad} v_2) - \operatorname{grad} h) + \gamma(\Delta(v_1 - v_2), \Delta h) \} dx$$

$$\leqslant \left(\int_G | b(u, \operatorname{grad} v_1) - b(u, \operatorname{grad} v_2) |^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_G |\operatorname{grad} h|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ \left(\int_G |\Delta(v_1 - v_2)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_G |\Delta h|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant c \| v_1 - v_2 \| \, \| h \|.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bổ đề 3.7. Giả thử các điều kiện (III.1) – (III.4) thỏa mãn. Khi đó, với $N \leqslant 4$ và $\forall u$, $z \in V$ ta có:

$$\varphi_{\sigma}(u(.)) \in L^2(S) \quad \forall u \in W.$$

Chứng minh: $\forall u, z, h \in V$ ta có:

$$|(A(u + z, u) - A(u,u), h)| = \left| \int_G \{ (b(u + z), \operatorname{grad} u) - b(u, \operatorname{grad} u), \operatorname{grad} h) - (f(u + z) - f(u), h) \} dx \right|$$

$$\leqslant M \int \{ |z| \, |\operatorname{grad} u| \, |\operatorname{grad} h| + |z| \, |h| \} dx$$

$$\leqslant c \left(\int_G |z|^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_G |\operatorname{grad} u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_G |\operatorname{grad} h|^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} + c \left(\int_G |z|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_G |h|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant c \| z \|_{(L^4(G))^r} \cdot \| u \|_{(H^1(G))^r} \cdot \| h \|_{(W^{1,4}(G))^r} + c |z| \, . \, |h|.$$

Vì $H^1(G)$ được nhúng liên tục trong $L^4(G)$ và $L^2(G)$, và $H^2(G)$ cũng được nhúng liên tục trong $W^{1,4}(G)$ với $N \leqslant 4$ nên ta suy ra $\forall N \leqslant 4$

$$\| (A(u+z, u) - A(u,u), h) \|_* \leqslant c \| z \|_{(H^1(G))^r} (\| u \|_{(H^1(G))^r} + 1) \| h \| .$$

Từ định lý nhúng [10] ta có $\forall N \leqslant 4$ và $\forall u, v \in V$

$$\| A(u+z, u) - A(u,u) \|_* \leqslant c \| z \|^{\frac{1}{2}} |z|^{\frac{1}{2}} (\| u \|^{\frac{1}{2}} |u|^{\frac{1}{2}} + 1)$$
$$\leqslant \delta \| z \| + c(\delta) |z| (\| u \| . |u| + 1).$$

Do đó $\varphi_\delta(u) \leqslant c(\delta)(\| u \| . |u| + 1)$. Chứng tỏ $\forall u \in W$ ta có $\varphi_\delta(u(.)) \in L^2(S) \leqslant \delta$.

Từ các định lý 1.1, 1.2, 2.1 và các bổ đề 3.1, 3.4—3.7 ta suy ra định lý sau:

Định lý 3.1. Giả thử các điều kiện (III.1) — (III — 4) được thỏa mãn và $N \leqslant 4$. Khi đó, bài toán hỗn hợp (3.1) — (3.3) có duy nhất một nghiệm suy rộng $u \in L^2(S; (H^2(G) \cap H_0^1(G))^r$, thêm vào đó $u' \in L^2(S; V^*)$ với $V = (H^2(G) \cap H_0^1(G))^r$.

Trong một bài báo sau [11], chúng ta sẽ xét đến các phương pháp xấp xỉ đối với nghiệm các phương trình toán tử dạng (1.1).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Lions, J. L.*, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris 1969.

2. *Lê Ngọc Lăng*. Về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của một lớp các phương trình toán tử.
Tạp chí « Khoa học tính toán và điều khiển » số 2, 1986.

3. *Brezis H.*, Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions les espaces de Hilbert.
Math. Studies 5, North — Holland 1973.

4. *Gajewski H.*, Gröger, K., Ein Iterationsverfahren für Gleichung mit einem maximal monotonen und einem stark monotonen Lipschitzsteitigen Operator.
Math. Nachr. 69,307 — 317 (1975).

5. *GajewskiH Gröger K.*, Zacharias K., Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen.
Berlin 1971.

6. *Browder F.E.*, Nonlinear maximal monotone Operators in Banach-space.
Math. Ann. 175,89 — 110 (1968).

7. *Babadshanjan H., Gajewski H.*, Zur Lösung einer nichtlinearen Diffusionsgleichung.
Math. Nachr. 79,253 — 259 (1977).

8. *Laltès R., Lions J. L.*, Méthode de Quasi — Reversibilité et applications.
Paris 1967.

9. *Zeidler E.*, Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis
II — Monotone Operatoren.
Leipzig 1977.

10. *Lions J. L. Magenes E.*, Problèmes aux limites non homogènes et applications 1.
Paris 1968.

(Xem tiếp trang 25)

Nếu $q_2 = \frac{\alpha^2}{q_1}$ ta thấy từ biểu diễn (23) ta cần có đánh giá

$$\| \widetilde{B} \| < \frac{\alpha(1 - q_2)}{(q - 2q_2)^2} < \frac{1}{2}$$

Hay ta cần đánh giá α sao cho thỏa mãn

$$4q_2^2 - 4q_2 + 1 - 2\alpha - 2\alpha q_2 > 0 . \quad (28)$$

Bất đẳng thức (28) tương đương với bất đẳng thức

$$1 - 2\alpha - 4\alpha^2 + 2\alpha q_2 = 1 - 2\alpha - 4\alpha^2 + \alpha(1 - \sqrt{1 - 4\alpha^2}) > 0 \quad (29)$$

Rõ ràng là (29) được thỏa mãn với mọi α thỏa mãn (20).

Cuối cùng nhận xét rằng các trường hợp ma trận A_i, B_i, C_i trong (13) là thưa bất kỳ Khi đó để đánh giá $\| \widetilde{B}_i \|$ và $\| \widetilde{C}_i \|$ chúng ta cần có đánh giá $\| A_i^{-1} \|$. Một trong những phương pháp là biểu diễn $A_i = \widehat{A}_i + \widetilde{A}_i$, $\widehat{A}_i$ có dạng ba đường chéo. Khi đó $\| \widetilde{A}_i \|$ đủ nhỏ thì ta có thể sử dụng các đánh giá (10) để lập các điều kiện tương tự (20).

Chương trình viết theo thuật toán (7) – (12) có thể làm quen trong bộ chương trình [1].

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. N.C. Điều, H.V. Lai, N.L. Thu. Một số thuật toán và chương trình giải hệ phương trình đại số tuyến tính với ma trận thưa cỡ lớn. Tạp chí KHTT và ĐK, số 1, 1986.

2. Kalitkin N.N., Phương pháp số (tiếng Nga). M. 1978.

3. Lankaster, Lý thuyết ma trận (tiếng Nga). M. 1978.

4 Khintsin A.A., Phân số dây chuyền (tiếng Nga). M. 1961

ABSTRACT

On the method Gauss for large sparse matrices.

In this paper the method Gauss for linear algebraic systems with large sparse matrices is developed. The storage of those matrices is in the compact form. Here we give one sufficient condition for Gauss factorisation, which is more general than the dominant diagonal's condition.

SỰ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM..,

(Tiếp theo trang 7)

ABSTRACT

Existence and uniqueness theorems for a class of initial value problem

In this paper we consider initial value problem of evolutione quations

$$u' + A(u,u) = f, \quad u(0) = u_0 \qquad (1)$$

where $A \in (H \times V \to V^*)$ is an operator of the variation – type.

In the 2 sections we prove an Existence and Uniqueness result for (1). The Uniqueness of solution of (1) can be improved if the solution u satisfy certain regularity condition.

In section III we apply our abstract result of section II to the diffusion – equations of the type:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} [b(u, \operatorname{grad} u)] + \gamma \Delta^2 u = f(u) \\ u = 0 \text{ and } \Delta u = 0 \text{ on } \partial G \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$