TẠP CHÍ KHOA HỌC TÍNH TOÁN VÀ ĐIỀU KHIỂN, TẬP II 1986), Số 3 (5-8)

QUAN HỆ GIỮA KHÓA CỦA HÀM ĐÓNG VÀ KHÓA CỦA LƯỢC ĐỒ QUAN HỆ

LÊ VĂN BÀO

Đặt vấn đề:

Trong việc nghiên cứu cơ sở dữ liệu mô hình quan hệ. một vấn đề quan trọng được đặt ra là xây dựng những thuật toán hữu hiệu để xác định khóa của lược đồ. Trong bài này sử dụng công cụ là hàm đóng để nghiên cứu một số tính chất khóa của lược đồ quan hệ. Trong phần đầu chứng minh tính đồng nhất giữa tập khóa của lược đồ quan hệ và khóa của hàm đóng. Sau đó nghiên cứu một số tính chất của hàm đóng, cuối cùng đưa ra biểu thức giao các khóa của hàm đóng.

1. Hàm đóng.

Cho $U = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ tập n – thành phần, 2^U là tập các tập con của U. Hàm f $2^U \to 2^U$ gọi là hàm đóng khi và chỉ khi với mọi $X, Y \subseteq U$

a) $X \subseteq f(X)$

b) $f(f(X)) = f(X)$

c) $Y \subseteq X$ thì $f(Y) \subseteq f(X)$.

Cho f là hàm đóng trên U. $K \in 2^U$, K gọi là siêu khóa của f nếu $f(K) = U$. K được gọi là khóa nếu K là siêu khóa bé nhất.

2. Lược đồ quan hệ.

Hệ tiên đề Armstrong:

Cho $X, Y, Z \subseteq U$.

Qui tắc 1: Nếu $Y \subseteq X$ thì $X \to Y$.

Qui tắc 2: Nếu $X \to Y$ và $Y \to Z$ thì $X \to Z$.

Qui tắc 3: Nếu $X \to Y$ thì $X \cup Z \to Y \cup Z$.

Lược đồ quan hệ là một cặp (U, F),

a) U là tập các thuộc tính,

b) F là tập các phụ thuộc hàm.

Ta gọi F^+ là tập các phụ thuộc hàm được suy diễn từ F bằng cách áp dụng các tiên đề của Armstrong.

Cho $X \subseteq U$. gọi $X^+ = \{Y \in U \mid X \to Y \in F^+\}$ và ta có:

$$X \to Y \in F^+ \text{ khi và chỉ khi } Y \subseteq X^+.$$

Tập $K \subseteq U$ gọi là siêu khóa của lược đồ (U, F) nếu $K \to U \in F^+$. Gọi K là khóa của (U, F) nếu K là siêu khóa bé nhất của (U, F). Trong cách định nghĩa trên tất nhiên ta có cho lược đồ (U, F) thì bao giờ cũng có ít nhất một khóa.

Cho (U, F) là lược đồ quan hệ, ta gọi C (U, F) là tập tất cả các khóa của (U, F). Cho f là hàm đóng trên U ta gọi C(f) tập tất cả các khóa của f.

3. Quan hệ giữa khóa của hàm đóng và khóa của lược đồ quan hệ.

Trong phần này trình bày hai kết quả liên quan giữa khóa của hàm đóng và khóa của lược đồ quan hệ.

Định lý 1: Cho (U, F) là lược đồ quan hệ, chúng ta xây dựng ánh xạ: $f: 2^U \to 2^U$ như sau: $\forall X \in 2^U: f(X) = X^+$, thì ta có:

1) f là hàm đóng

2) $C(f) = C(U, F)$

Chứng minh: Trước tiên ta chứng minh 1).

a) X^+ là bao đóng của X. Vậy nên $X \subseteq X^+$, từ đó $X \subseteq f(X)$.

b) Mặt khác $X^+ = (X^+)^+$. Vậy nên $f(X) = f(f(X))$.

c) Từ $X \subseteq Y$ ta có bao đóng $X^+ \subseteq Y^+$, tức là $f(X) \subseteq f(Y)$.

Vậy ta có f là hàm đóng.

Bây giờ ta chứng minh phần 2). Cho K là khóa của lược đồ quan hệ (U, F), từ đó $K \to U$, và tất nhiên $U \subseteq K^+ \subseteq U$. Vậy $f(K) = U$, ta có k là siêu khóa của f. Giả sử K không phải là khóa tức tồn tại $K' \notin K$ và $f(K') = U$. Từ định nghĩa của f ta có $K'^+ = U$ tức $K' \to U$, điều này mâu thuẫn với K là khóa của (U, F).

Bây giờ giả sử K là khóa của f. Tất nhiên $f(K) = U$. Vậy $K^+ = U$. Từ đó $K \to U$, ta có K là siêu khóa của (U, F). Giả sử K không phải là khóa của (U, F) tồn tại K' khóa (U, F), $K' \notin K$ và $K' \to U$. Từ đó $K'^+ = U$ hay $f(K') = U$. Mâu thuẫn với K là khóa của f.

Định lý 2. Cho $f: 2^U \to 2^U$ là hàm đóng. Chúng ta xây dựng lược đồ quan hệ (U, F) như sau:

$$F = \{X \to f(X) \mid X \in 2^U\}.$$

Thì $$C(f) = C(U, F).$$

Chứng minh: Trước tiên ta cần chứng minh rằng: $\forall X \in 2^U$ thì $f(X) = X^+$. Từ định nghĩa của hàm f ta có $X \to f(X)$. Vậy nên $f(X) \subseteq X^+$. Ta còn phải chứng minh bao hàm thức ngược chiều $X^+ \subseteq f(X)$.

Ta chứng minh bằng qui nạp

$$\forall n: X^{(n)} \subseteq f(X).$$

a) Ta có $X^{(o)} = X \subseteq f(X)$ vì f là hàm đóng.

b) Giả sử ta đã có $X^{(n)} \subseteq f(X)$. Bây giờ ta chứng minh $X^{(n+1)} \subseteq f(X)$.

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} \cup \{Y \mid Z \to Y \in F^+ \text{ và } Z \subseteq X^{(n)}\}.$$

Mặt khác từ $Z \in X^{(n)}$ suy ra

$$f(Z) \subseteq f(X^{(n)}) \subseteq f(f(X)) = f(X).$$

Vậy $\cup \{f(Z) \mid Z \subseteq X^{(n)}\} \subseteq f(X)$.

hiển nhiên ta có $X^{(n+1)} \subseteq f(X)$. Cuối cùng ta được $X^+ = f(X)$. Áp dụng định lý 1 cho kết quả trên ta thu được

$$C(f) = C(U, F).$$

Qua kết quả của định lý 1 và định lý 2 ta thấy trên một phần nào đó việc nghiên cứu khóa của lược đồ quan hệ, có thể qua việc nghiên cứu khóa của hàm đóng. Ngược lại việc nghiên cứu khóa của hàm đóng ta cũng có thể nghiên cứu thông qua việc nghiên cứu khóa của lược đồ quan hệ.

4. Khóa của hàm đóng

Cho U là tập n phần tử $U = \{a_1, a_2 \dots a_n\}$, $f: 2^U \to 2^U$ là hàm đóng.

Với mọi $X \in 2^U$, ta gọi $\overline{X} = f(X) \setminus X$.

Ta định nghĩa hai tập P và T như sau

a) $T = \cup \{X \mid X \in 2^U \text{ và } f(X) \neq X\}$

b) $P = \cup \{\overline{X} \mid X \in 2^U \text{ và } f(X) \neq X\}$

Bổ đề 1. cho f là hàm đóng $X \subseteq U$ và $a \notin T$

Thì: $f(X \setminus a) = f(X)$ hoặc $f(X \setminus a) = f(X) \setminus a$

Chứng minh:

Ta xét hai trường hợp sau

a) Nếu $a \notin X$ thì $X = X \setminus a$ hiển nhiên $f(X) = f(X \setminus a)$

b) Nếu $a \in X$ và $a \notin T$ ta có $f(X) = X$ từ đó $f(X) \setminus a = X \setminus a$. Vậy $f(f(X) \setminus a) = f(X \setminus a)$ Mặt khác ta có

$$f(X) \setminus a \subseteq f(f(X) \setminus a) = f(X \setminus a) \subseteq f(X)$$

Vậy ta có:

$$f(X \setminus a) = f(X) \text{ hoặc } f(X \setminus a) = f(X) \setminus a$$

Bổ đề 2. Cho f là hàm đóng, khi đó, nếu $X \subseteq U$ thì

a) $f(X) \subseteq X \cup P$

b) $P \subseteq f(T)$

Chứng minh: a) Hiển nhiên

b) Cho $a \in P$ từ định nghĩa tồn tại $X \subseteq U$, $f(X) \neq X$ và $a \in f(X) \setminus X$. Hiển nhiên $X \subseteq T$ từ đó $f(X) \subseteq f(T)$. Vậy: $a \in f(T)$.

Bổ đề 3. Cho f là hàm đóng, $X \subseteq U$. Nếu

$$a \in f(X) \setminus P. \text{ Thì } a \in X.$$

Chứng minh. Ta có: $f(X) = X \cup P$, $a \in f(X)$ và $a \notin P$. Hiển nhiên $a \in X$.

Bổ đề 4. Cho f là hàm đóng trên U; X, $Y \subseteq U$

Nếu $a \notin T$ và $f(Y) \subseteq f(X)$ thì $f(Y \setminus a) \subseteq f(X \setminus a)$

Chứng minh: Vì $a \notin T$ theo bổ đề 1 ta có

$$f(X \setminus a) = f(X) \text{ hoặc } f(X \setminus a) = f(X) \setminus a$$

a) Nếu $f(X \setminus a) = f(X)$ ta có:

$$Y \setminus a \subseteq f(Y) \setminus a \subseteq f(X) \setminus a \subseteq f(X) = f(X \setminus a)$$

Vậy: $f(Y \setminus a) \subseteq f(f(X \setminus a)) = f(X \setminus a)$

b) Nếu $f(X \setminus a) = f(X) \setminus a$ ta có:

$$Y \setminus a \subseteq f(Y) \setminus a \subseteq f(X) \setminus a = f(X \setminus a)$$

Vậy $f(Y \setminus a) \subseteq f(f(X \setminus a)) = f(X \setminus a)$

Bổ đề 5. Cho f là hàm đóng $K \subseteq U$; Nếu $\exists a \in U$ và $a \in K \cap f(K \setminus a)$ thì K không phải là khóa của f.

Chứng minh: $a \in K$ Vậy $K \setminus a \notin K$ từ đó ta suy ra $f(K \setminus a) \subseteq f(K)$ Mặt khác từ $a \in f(K \setminus a)$ ta có : $a \cup (K \setminus a) \subseteq f(K \setminus a)$ tức là $K \subseteq f(K \setminus a)$ từ đó $f(K) \subseteq f(f(K \setminus a)) = f(K \setminus a) \subseteq f(K)$

Vậy K không phải là khóa của f.

Định lý 3. Cho f là hàm đóng trên U, K là khóa của f, thì $U \setminus P \subseteq K \subseteq (U \setminus P) \cup (P \cap T)$

Chứng minh: Trước tiên ta chứng minh cho $U \setminus P \subseteq K$ Giả sử điều đó không xảy ra tức là tồn tại $a \in (U \setminus P) \setminus K$ Tất nhiên $a \notin P$ và $a \notin K$; K là hàm đóng vậy $a \in f(K)$ Áp dụng bổ đề 3 ta có $a \in K$, điều này mâu thuẫn. Vậy

$$U \setminus P \subseteq K$$

Bây giờ ta chứng minh cho $K \subseteq (U \setminus P) \cup (P \cap T)$

Ta có $U = (U \setminus P) \cup P = (U \setminus P) \cup (P \cap T) \cup (P \setminus T)$ Giả sử $K \notin (U \setminus P) \cup (T \cap P)$ tức là tồn tại $a \in K \cap (P \setminus T)$ Vậy $a \in K$, $a \in P$ và $a \notin T$ Vì K là khóa f nên $f(K) = U = f(U)$, $a \notin T$ ta áp dụng bổ đề 4, ta có $f(K \setminus a) = f(U \setminus a)$, từ $a \notin T$ tức là $T \subseteq U \setminus a$ Vậy $f(T) \subseteq f(U \setminus a)$ Theo bổ đề 2, $P \subseteq f(T)$ và từ $a \in P$ ta có

$$a \in P \subseteq f(T) \subseteq f(U \setminus a) = f(K \setminus a)$$

Tức là $a \in K \cap f(K \setminus a)$ Bây giờ ta Áp dụng bổ đề 5 suy ra K không phải là khóa của f.

Định lý đã được chứng minh.

5. Giao các khóa của hàm đóng.

Bổ đề 6. Cho f là hàm đóng và $a \in P$, thì tồn tại khóa K của f mà $a \notin K$.

Chứng minh :

$$a \in P \text{ thì tồn tại } X \subseteq U \text{ mà } a \in f(X) \setminus X.$$

Gọi C là tập hợp $C \subseteq U : f(X) \cup C = U$ và $f(X) \cap C = \phi$ Hiển nhiên ta có: $U \subseteq f(X) \cup C \subseteq f(X \cup C) \subseteq U$. Vậy nên $f(X \cup C) = U$ từ đó ta suy ra tồn tại khóa $K \subseteq X \cup C$ và tất nhiên $a \notin K$.

Định lý 4. Cho f là hàm đóng trên U. Thì giao tất cả các khóa của f, ký hiệu là I sẽ bằng

$$I = U \setminus P$$

Chứng minh: Từ định lý 3 ta có $U \setminus P \subseteq I$. Theo bổ đề 6 ta nhận được $I \cap P = \phi$ Vậy nên $I \subseteq U \setminus P$. Cuối cùng $I = U \setminus P$

Nhận ngày 15-4-1986

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **W.W. Armstrong:** Dependency structures of Data Base Relationship (Imforonation processing 74) North Holland Pub. C. Amsterdam.

2. **G. Burosch, J. Demetrovics and G.O.H. Katoma.** The Poset of Cloeure.

3. **Le Van Bao:** Sufficient and Necessary condition for which a Relation scheme has precisely one key (to appear).

4. **Nguyễn Xuân Huy:** Đẳng cấu giữa giàu các cấu trúc phụ thuộc hàm và giàu các hàm đóng.

Tạp chí Toán học, 1, 1986.

РЕЗЮМЕ

О СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ КЛЮЧАМИ ЗАМКНУТОЙ ФУНКЦИИ И КЛЮЧАМИ РЕЛЯЦИОННОЙ СХЕМЫ

Одной из важных задач при изучении реляционых моделей является нахождение наиболее эффективных алгоритмов определения ключей заданной реляционной схемы. В данной работе применяется понятие замкнутых функции для исследования некоторых свойств ключей схемы. Доказывается соответствие между множествами ключей реляционной схемы и замкнутой функции. Формируются некоторые свойства замкнутой функции и наконец описывается формула взятья пересечения ключей замкнутой функции.