TẠP CHÍ KHOA HỌC TÍNH TOÁN VÀ ĐIỀU KHIỂN, Tập II (1986), Số 2 (10—19)

BÀI TOÁN NGƯỢC CỦA PHƯƠNG TRÌNH NHÂN CHẬP HAI CHUỖI THỜI GIAN VÀ ỨNG DỤNG

PHAN ĐĂNG CẦU
Viện Khoa học Tính toán và điều khiển

MỞ ĐẦU

Phương pháp giải chập dự báo hay mô hình toán học tượng ứng là mô hình thống kê. trể cực tiểu được đề xuất bởi Robinson (xem [5]) đã được ứng dụng có hiệu quả trong việc xử lý số liệu địa chấn thăm dò dầu khí.

Tuy vậy, về phương diện toán học, mô hình này vẫn có những điểm không hợp lý mà chính Robinson cũng nhiều lần băn khoăn về các giả thiết của mình.

Trong bài này chúng tôi phân tích mô hình Robinson, đưa ra cách lý giải mới về tính thống kê của mô hình. Dựa vào các kết quả của các nhà địa vật lý chúng tôi đề xuất mô hình tổng quát hơn, gần thực tế hơn, sao cho trong đó những mâu thuẫn trong mô hình cũ được loại trừ; đồng thời chứng minh rằng: hai mô hình tuy khác nhau khi tính toán trên hàm tự tương quan, nhưng các bước tính toán trên quan sát lại giống hệt nhau. Nói cách khác, mặc dầu xuất phát từ giả thiết không hợp lý, cách tính toán của Robinson thực ra lại đúng cho những giả thiết rộng hơn.

1. MÔ HÌNH ROBINSON

Để xây dựng mô hình toán học, Robinson giả thiết những điều kiện lý tưởng:

(i) Các mặt cách là nằm ngang và cách đều đúng bằng $\frac{1}{2}$ đơn vị thời gian truyền của sóng.

(ii) Sóng phát là xung Đirac tại $t = 0$, tức

$$d(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

tác động vuông góc với các mặt cách và không đổi dạng khi truyền.

(iii) Máy ghi địa chấn đặt đúng vào vị trí nổ mìn và ghi số vào đúng các thời điểm $t = 0, 1, 2, \ldots$

Theo Robinson trường hợp nổ mìn có thể xem sóng phát là xấp xỉ xung Đirac. Với các giả thiết trên, gọi vết địa chấn phản xạ ghi được là x_n, $n = 0, 1, 2 \ldots$ chuỗi hệ số phản xạ là $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \ldots$ ta có hệ thức xấp xỉ:

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_p x_{n-p} = \varepsilon_n \tag{2}$$

Khi có nhiễu, vết địa chấn phản xạ ghi được có dạng:

$$y_n = x_n + v_n \tag{3}$$

Trong đó v_n là nhiễu.

Bài toán giải chập được giải quyết với giả thiết là nhiễu đã được loại trừ. Robinson đưa ra cách giải quyết sau:

Theo White và Obriend thuộc công ty dầu khí Anh, Schoenberger và Levin của công ty Exxon, khi đo các hệ số phản xạ của các mặt cách dọc thành giếng khoan ở các mỏ dầu đã khai thác người ta thấy dãy hệ số phản xạ $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ rất giống thể hiện của nhiễu trắng. Nghĩa là với N khá lớn ta có

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon_n^2 \approx \sigma^2 > 0 \tag{4}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon_{n+s}\varepsilon_n \approx 0,\ s = 1, 2, \ldots$$

(xem [7]. tr. 278).

Dựa vào các hệ thức (4) và (5) Robinson giả thiết rằng dãy ε_n là tất định nhưng có thể xem như thể hiện của nhiễu trắng, do đó nếu ta giả thiết toán tử $(a_0, a_1, \ldots, a_p)$ là trễ cực tiểu (xem [6]) khi đó dãy x_n có thể xem là thể hiện của quá trình dừng tự hồi quy. Đặt:

$(b_0, b_1, b_2, \ldots$ là toán tử đảo của $(a_0, a_1, \ldots, a_p)$

$\varphi_s = E x_{n+s} x_n$

$$\Phi = [\varphi_0\, \varphi_1, \ldots, \varphi_p] = \begin{Bmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & \ldots & \varphi_p \\ \varphi_1 & \varphi_0 & \ldots & \varphi_{p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_p & \varphi_{p-1} & \ldots & \varphi_0 \end{Bmatrix}$$

$$a = (a_0, a_1, a_p)' \quad ; \quad f = (b_0\sigma^2, o, \ldots, o)' \tag{6}$$

$$e = (1, 0, \ldots, 0)'$$

$$r_x(s) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_{n+s}x_n$$

$$R = [r_x(0), r_x(1), \ldots, r_x(p)]$$

Ta có hệ phương trình Yule-Walker: $\Phi a = f$ (7)

Trong địa chấn ta chỉ quan tâm đến dạng hàm phản xạ, do đó ta có thể dùng hệ phương trình sau để xác định $\alpha = \frac{1}{b_0\sigma^2}\, a$

$$\Phi\alpha = e \tag{8}$$

Khi dãy ε_n độc lập cùng phân phối, hệ (8) có dạng xấp xỉ (theo nghĩa hội tụ theo xác suất) là:

$$R\,\alpha = e \tag{9}$$

Hệ (9) cho ta ước lượng vững $\widehat{\alpha}$ của α và từ đây ta xác định được $\widehat{\varepsilon_n} = \widehat{\alpha}_n * x_n$ là ước lượng vững của ε_n, sai khác một nhân tử hằng số.

2. VÀI NHẬN XÉT VỀ MÔ HÌNH ROBINSON

Theo chúng tôi nghĩ, điều khó hiểu nhất ở mô hình Robinson chính là cách lý giải về tính thống kê của mô hình. Trong công thức (2) dãy ε_n là các hệ số phản xạ, là các số tất định, do đó có thể xem ε_n là biến ngẫu nhiên thỏa mãn:

$$E\,\varepsilon_n = \varepsilon_n \tag{10}$$

$$E(\varepsilon_n - R\varepsilon_n)^2 = Var\varepsilon_n = 0 \tag{11}$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết của Robinson:

$$E\varepsilon_n = 0 \tag{12}$$

$$\text{Var}\,\varepsilon_n = \sigma^2 > 0 \tag{13}$$

Trong địa chấn, người ta dựa vào sự không đồng đều của các hệ số phản xạ để nhận ra các mặt cách. Ở đây Robinson giả thiết dãy ε_n là các biến ngẫu nhiên có hai đặc trưng cơ bản là kỳ vọng và phương sai bằng nhau, chúng tôi nghĩ là không hợp lý.

3. XÂY DỰNG MÔ HÌNH MỚI

Mặc dầu trong thực hành người ta dùng các khâu xử lý để đưa về trường hợp lý tưởng (i), (ii), (iii) nhưng trong thực tế thí dụ điều kiện (ii) không thể đạt được, dù là xấp xỉ.

Ta hãy xét trường hợp nổ mìn. Trong trường hợp này, theo Robinson và các nhà địa vật lý, mặc dầu lực lúc đầu có dạng hàm Đirac, nhưng ngay sau đó biến thành sóng đàn hồi và truyền vào lòng đất. Sóng đàn hồi chính là sự lan truyền dao động của các hạt quanh vị trí cân bằng, do đó luôn luôn có dạng hình sin tắt dần (xem [3], tr. 80).

Ta gọi epoch của một sóng là khoảng thời gian từ thời điểm ta bắt đầu quan sát đến một điểm qui ước trên sóng. Có 2 trường hợp:

1. Epoch là tất định. Ta gọi sóng hay tín hiệu tương ứng là tín hiệu đồng bộ.

2. Epoch là ngẫu nhiên. Ta gọi tín hiệu tương ứng là không đồng bộ.

Thực nghiệm chỉ ra rằng epoch của xung phản xạ thường có phân bố đều theo thời gian (xem [3], tr. 143).

Bây giờ ta xét việc ghi số một giá trị trên xung phản xạ f (t) có biên độ cực đại là $|\varepsilon|$. Vì epoch của sóng có phân bố đều, ta có giá trị ghi được u thỏa mãn:

$$u = f(\tau)$$

Trong đó τ có phân bố đều trên [a,b]. Vì hàm $f(t)$ có dạng hình sin tắt dần, ta có:

$$Eu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \approx 0 \tag{14}$$

$$Eu^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)\,dt = \frac{\varepsilon^2}{b-a}\int_a^b f_1^2(t)\,dt \tag{15}$$

Trong đó $f_1(t)$ có dạng như $f(t)$ nhưng có biên độ cực đại là 1.

Vậy u là biến ngẫu nhiên kỳ vọng 0, phương sai tỷ lệ với ε^2.

Môi trường địa chấn trong thực tế hết sức phức tạp, do đó trong công thức (2) ta không thể xem dãy ε_n là các hệ số phản xạ, thậm chí không phải là xấp xỉ của chúng. Từ (2) ta có

$$x_n = b_0\varepsilon_n + b_1\varepsilon_{n-1} + \dots + b_n\varepsilon_0 \tag{16}$$

Từ công thức này và sơ đồ truyền sóng của Robinson (xem [6]) ta có thể suy luận rằng trong trường hợp xung phát khá hẹp, xung phản xạ tại thời điểm t—n là tổng của các xung phản xạ thành phần liên hệ với các mặt cách. Do đó khi lấy mẫu, giá trị x_n của sóng phản xạ có dạng

$$x_n = b_0 u_n + b_1 u_{n-1} + \dots + b_n u_0 \tag{17}$$

Ở đây chúng tôi dùng ký hiệu u_n thay cho ε_n để tránh sự nhầm lẫn. Như chúng tôi vừa chỉ ra, u_n là biến ngẫu nhiên có kỳ vọng 0 và phương sai tỷ lệ với ε_n^2, trong đó ε_n là hệ số phản xạ. Vì u_n bị chặn đều, ta có $E|u_n|^m < 1$. Tuy vậy ở (21) chúng tôi sẽ chỉ giả thiết $E|u_n|^{2+\varepsilon_0} < K < \infty$ với $\varepsilon_0 > 0$ nào đó. Dựa vào (4) ta có:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Var}u_n \approx \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon_n^2 \approx \sigma^2 > 0$$

Do đó trong mô hình toán học chúng tôi đặt:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Var}u_n = \sigma^2 > 0$$

Trong môi trường địa chấn phức tạp, các epoch của các xung phản xạ thành phần hầu như không liên hệ với nhau, do đó chúng tôi giả thiết dãy u_n độc lập. Chúng tôi dùng giả thiết toán tử $(a_0, a_1, \ldots a_p)$ trễ cực tiểu của Robinson (xem [5]). Tóm lại chúng tôi nới rộng mô hình Robinson như sau:
Vết địa chấn phản xạ x_n thỏa hệ thức:

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_px_{n-p} = u_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{18}$$

Ngoài ra các giả thiết sau thỏa mãn:

(a) Dãy $u_0, u_1, \ldots$ độc lập, kỳ vọng 0 và với $\varepsilon_0 > 0$ nào đó:

$$E|u_n|^{2+\varepsilon_0} < K < \infty \tag{19}$$

(b)
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Var}u_n = \sigma^2 > 0 \tag{20}$$

(c) Toán tử $(a_0, a_1, \ldots, a_p)$ trễ cực tiểu nghĩa là

$$|a_0 + a_1z + \ldots + a_pz^p| \neq 0 \quad \text{khi} \quad |z| < 1 \tag{21}$$

4. TÍNH TOÁN VỚI CÁC GIẢ THIẾT MỚI

Định lý 1. Giả sử dãy x_n, $n = 0, 1, 2\ldots$ thỏa hệ thức (18) và các điều kiện (a), (b), (c), khi đó với mọi $s = 0, 1, 2, \ldots$ tồn tại giới hạn

$$\operatorname*{p\,lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_{n+s}x_n = f_s \tag{22}$$

Ma trận $F = [f_0, f_1, \ldots, f_s]$ là xác định dương và thỏa hệ phương trình:

$$Fa = f \tag{23}$$

Trong đó $f = (b_0\sigma^2, 0, \ldots, 0)$ và plim hiểu là hội tụ theo xác suất.

Chứng minh. Đặt $X_n = u_n^2 - Eu_n^2$.

Theo bất đẳng thức Minkowski ta có:

$$\left(E|X_n|^{1+\frac{\varepsilon}{2}}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon_0/2}} = \left(E|u_n^2 - Eu_n^2|^{1+\frac{\varepsilon_0}{2}}\right)^{\frac{1}{1+\frac{\varepsilon_0}{2}}} \leqslant$$

$$\leq \left(E\,|u_n|^{2+\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{1+\frac{\varepsilon_0}{2}}} + Eu_n^2 < K^{\frac{1}{1+\frac{\varepsilon_0}{2}}} + c < \infty$$

Trong đó $E u_n^2 < c < \infty$ do (19). Do đó

$$E\,|X_n|^{1+\frac{\varepsilon_0}{2}} < \left(K^{\frac{1}{1+\varepsilon_0/2}} + c\right)^{1+\frac{\varepsilon_0}{2}} < \infty$$

Vậy dãy X_n thỏa điều kiện định lý Markov (xem [2], tr. 287) do đó,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_n \to 0 \qquad \text{theo phân bố}$$

Vì dãy X_n độc lập, do đó theo định lý tương đương (xem [2], tr. 263) sự hội tụ trên tương đương với hội tụ theo xác suất, do đó:

$$\underset{N\to\infty}{\text{plim}}\ \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_n = \underset{N\to\infty}{\text{plim}}\ \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(u_n^2 - E\,u_n^2) = \underset{N\to\infty}{\text{plim}}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} E\,u_n^2\right) = 0 \quad (24)$$

Từ (24) và (20) ta có

$$\underset{N\to\infty}{\text{plim}}\ \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} E\,u_n^2 = \sigma^2 \qquad (25)$$

Với $s \geq 1$ là số tự nhiên bất kỳ, xét

$$E\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_{n+s}\,u_n\right)^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{n,\,m=0}^{N-1} E(u_{n+s}\,u_n\,u_{m+s}\,u_m) = \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1} E\,u_{n+s}^2 u_n^2$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1} E\,u_{n+s}^2\,E\,u_n^2 \leq \frac{Nc^2}{N^2} = \frac{c^2}{N} \to 0 \qquad (26)$$

Để có biến đổi trên ta đã dùng tính độc lập của dãy u_n.

Sử dụng (26) và bất đẳng thức Trê-bư-sep ta có

$$\underset{N\to\infty}{\text{plim}}\ \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_{n+s}\,u_n = 0 \qquad s = 1, 2, \ldots \qquad (27)$$

Gọi z_n là quá trình dừng tự hồi qui tương ứng với quá trình x_n, nghĩa là z_n thỏa mãn:

$$a_0 z_n + a_1 z_{n-1} + \ldots + a_p z_{n-p} = v_n \qquad n = \ldots -1, 0, 1, 2, . \qquad (28)$$

Trong đó v_n là nhiễu trắng với $Ev_n^2 = \sigma^2$

Sử dụng (21) ta có

$$z_n = \sum_{s=0}^{\infty} b_s\,v_{n-s} \qquad (29)$$

Hàm tự tương quan f_s của z_n có dạng:

$$f_s = Ez_{n+s}z_n = \sigma^2\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+s}b_n \qquad (30)$$

và thỏa mãn hệ phương trình Yule — Walker:

$$Fa = f \qquad (31)$$

Trong đó $F = [f_o, f_1, ..., f_p]$ là ma trận xác định dương.

Từ (20) ta có:

$$x_n = \sum_{n=o}^{n} b_s u_{n-s} = \sum_{s=o}^{\infty} b_s u_{n-s} \quad \text{với } u_m = o \text{ khi } m < 0 \tag{32}$$

Xét tổng

$$\frac{1}{N}\sum_{n=o}^{N-1} x_{n+s}x_n = \frac{1}{N}\sum_{n=o}^{N-1}\sum_{l=o}^{\infty}\sum_{r=o}^{\infty} b_l b_r u_{n+s-l}\, u_{n-r} = \sum_{r=o}^{\infty} b_r \sum_{l=o}^{\infty} b_l \frac{1}{N}\sum_{n=o}^{N-1} u_{n+s-l}\, u_{n-r}$$

Do (25) và (27) ta có

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=o}^{N-1} u_{n+s-l}\, u_{n-r} = \begin{cases} \sigma^2 & l = s + r \\ 0 & l \neq s + r \end{cases}$$

Do đó

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=o}^{N-1} x_{n+s}x_n = \sum_{r=o}^{\infty} b_r \sum_{l=o}^{\infty} b_l \operatorname*{Plim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=o}^{N-1} u_{n+s-l}u_{n-r} = \sigma^2 \sum_{r=o}^{\infty} b_r b_{r+s} \tag{33}$$

Sử dụng (30), (31), (33) ta có (23), là điều cần chứng minh.

Nhận xét: Trong (23), f_s không phải là hàm tự tương quan của quá trình x_n, vì quá trình x_n nói chung không dừng, mà là hàm tự tương quan của quá trình z_n tương ứng. Đặt $\alpha = \frac{1}{b\sigma^2} a$, (23) trở thành:

$$F\alpha = e \tag{34}$$

Do tính chất (22), hệ (34) có dạng xấp xỉ (theo nghĩa hội tụ theo xác suất) là:

$$\widehat{R}\alpha = e \tag{35}$$

Vậy (35) trùng với (9). Nghĩa là cách tính toán trên quan sát để ước lượng toán tử $(a_o, a_1, ..., a_p)$ với giả thiết u_n là nhiễu trắng cũng giống như với giả thiết (19), (20).

5. VỀ VIỆC KIỂM ĐỊNH GIẢ THIẾT ĐỐI VỚI MÔ HÌNH MỚI

Khác với quá trình dừng tự hồi qui, việc kiểm định giả thiết với mô hình mới khá khó khăn và không phải lúc nào cũng làm được. Ta xét ví dụ sau:

Giả sử dãy x_n thỏa mãn

$$x_n + a x_{n-1} = u_n \quad n = 0,1,2.... \quad |a| < 1 \tag{36}$$

Dãy u_n thỏa điều kiện (19). Điều kiện (20) được thay bằng điều kiện đặc biệt hơn như sau:

Gọi L là tập con nào đó của tập $\mathcal{N}$ các số nguyên không âm sao cho

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi_L(n) = \lambda > 0 \tag{37}$$

Trong đó

$$\chi_L(n) = \begin{cases} 1 & n \in L \\ 0 & n \notin L \end{cases}$$

Dãy u_n thỏa mãn

$$E u_n^2 = \sigma^2 \chi_L(n)$$

Nghĩa là

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} E u_n^2 = \lambda\sigma^2 \tag{38}$$

Định lý 2. Với các giả thiết trên, khi $\lambda > \frac{1}{2}$ ta có $\frac{\hat{a}-a}{A}$ có phân phối tiệm cận chuẩn $\mathcal{N}(0,1)$ khi $N \to \infty$ trong đó $\hat{a}$ thỏa mãn

$$R\hat{a} = f \text{ và } A = \sqrt{E(\hat{a}-a)^2}$$

Chứng minh : Để đơn giản trong cách viết, ta đặt $\sigma^2 = 1$. Đặt

$$y_n = x_{n-1} u_n$$

$$S = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n$$

$$D = \sqrt{ES^2}$$

Ta có

$$\hat{a} - a = -S \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_{n-1}^2 \right)^{-1}$$

Từ (22) suy ra $\operatorname{phim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum x_{n-1}^2 = f_0$ do đó để chứng minh $\frac{\hat{a}-a}{A} \to \mathcal{N}(0,1)$ ta cần chứng minh $\frac{S}{D} \to N(0,1)$. Đặt $H = \mathcal{N} - L$ khi đó

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_H(n) = 1 - \lambda < \frac{1}{2}$$

Do đó ta có thể chọn N_0 sao cho với mọi $N \geqslant N_0$ ta có

$$N - 2 \sum_{n=1}^{N} \chi_H(n) - 1 > \delta_0 N \quad \text{Với } \delta_0 > 0 \text{ nào đó} \tag{39}$$

Từ (39) ta có :

$$ES^2 = \sum_{n=1}^{N} Eu_n^2\, Ex_{n-1}^2 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{s=0}^{n-1} a^{2(n-s-1)} \chi_L(n)\chi_L(S) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \chi_L(n)\chi_L(n-1) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{N} [1 - (\chi_H(n) + \chi_H(n-1))] \geqslant N - 2\sum_{n=1}^{N} \chi_H(n) \; 1 > \delta_0 N$$

Vậy khi $N > N_0$ thì $D^2 = ES^2 > \delta_0 N$ (40)

Từ (36) suy ra

$$x_n = \sum_{s=0}^{\infty} (-a)^s u_{n-s} \quad \text{Với } u_n = 0 \text{ khi } n < 0$$

Với $m \in \mathcal{N}$ ta đặt

$$x_n^{(m)} = \sum_{s=0}^{m} (-a)^s u_{n-s}$$

$$z_n^{(m)} = x_n - x_n^{(m)} = \sum_{s=m+1}^{n} (-a)^s u_{n-s}$$

$$y_n^{(m)} = x_{n-1}^{(m)} u_n$$

$$S^{(m)} = \sum_{n=1}^{N} y_n^{(m)}$$

$$Z^{(m)} = S - S^{(m)} = \sum_{n=r}^{N} \sum_{s=m+1}^{n-1} (-a)^s u_n u_{n-1-s}$$

Khi đó

$$EZ^{(m)^2} = \sum_{n,l=1}^{N} \sum_{s,r=m+1}^{n-1} (-a)^{s+r} u_n u_{n-1-s} u_l u_{l-1-r} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \sum_{s=m+1}^{n-1} Eu_n^2 u_{n-1-s}^2 a^{2s} \leqslant \frac{Na^{2(m+1)}}{1-a^2} \tag{41}$$

Với $N > N_0$ sử dụng (40) và (41) ta có

$$\frac{EZ^{(m)^2}}{D^2} \leqslant \frac{Na^{2(m+1)}}{(1-a^2)\, D^2} \leqslant \frac{Na^{2(m+1)}}{(1-a^2)\, N\delta_0} = \frac{a^{2(m+1)}}{(1-a^2)\,\delta_0} \to 0 \text{ khi } m \to \infty \tag{42}$$

Ta cũng có thể kiểm tra rằng $S^{(m)}$ cũng có tính chất (40), nghĩa là:

$$ES^{(m)^2} = D_m^2 > \delta_0 N \qquad \text{với } N > N_0 \tag{43}$$

Bây giờ với $2m < k < N$ ta viết

$$N = Mk + r, \qquad r < k$$

và biểu diễn $S^{(m)}$ thành tổng sau:

$$S^{(m)} = X_{kN} = Z_{kN}$$

Trong đó

$$z_l = \begin{cases} y^{(m)}_{(l-1)k+1} + \ldots + y^{(m)}_{lk-m} & l = 1, 2, \ldots, M \\ y^{(m)}_{Mk+1} + \ldots + y^{(m)}_{N} & l = M+1 \end{cases}$$

$$v_l = y^{(m)}_{lk-m+1} + \ldots + y^{(m)}_{lk} \qquad l = 1, 2, \ldots, M$$

$$X_{kN} = \begin{cases} v_1 + v_2 + \ldots + v_M & k < N \\ 0 & k > N \end{cases} \qquad Z_{kN} = z_1 + z_2 + \ldots + z_M + z_{M+1}$$

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski ta chứng minh được:

$$EX_{kN}^2 \leqslant MC_m \tag{44}$$

Do đó

$$\frac{EX_{kN}^2}{N} \leqslant \frac{M}{N} C_m \leqslant \frac{1}{k} C_m \tag{45}$$

Khi $N > N_0$ ta có

$$0 < \delta_0 < \frac{ES^{(m)}}{N} < \frac{EZ_{kN}^2}{N} + \frac{1}{k} C_m$$

Vậy tồn tại $\gamma_0 > 0$ và k_0 để với mọi $k > k_0$ ta có:

$$D_{kN}^2 = EZ_{kN}^2 > \gamma_0 N \tag{46}$$

Ta có thể thấy đây $z_1, z_2, \ldots, z_{M+1}$ là độc lập và thỏa mãn:

$$\frac{1}{D_{kN}^{2+\varepsilon_0}} \sum_{n=1}^{M+1} E\,|z_n|^{2+\varepsilon_0} \leqslant \frac{(M+1)G_k}{N^{1+\frac{\varepsilon_0}{2}}\,\gamma_0^{1+\frac{\varepsilon_0}{2}}} \leqslant \frac{NG_k}{N^{1+\frac{\varepsilon_0}{2}}\,\gamma_0^{1+\frac{\varepsilon_0}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{N^{\frac{\varepsilon_0}{2}}} \frac{G_k}{\gamma_0^{1+\frac{\varepsilon_0}{2}}} \to 0, \text{ khi } N \to \infty$$

Vậy khi k cố định, theo định lý Ljapounov (xem [4], tr. 374).

$$\frac{Z_{kN}}{D_{kN}} \to \mathcal{N}(0,1) \text{ khi } N \to \infty \text{ và k cố định}$$

Ta thấy

$$\frac{EX_{kN}^2}{D_{kN}^2} = \frac{EX_{kN}^2}{N} \frac{N}{D_{kN}^2} \leqslant \frac{1}{k} C_m \frac{N}{\gamma_0 N} \leqslant \frac{C_m}{k\gamma_0} \to 0 \text{ khi } k \to \infty \text{ đều với mọi } N \tag{47}$$

Bây giờ ta xét

$$\frac{S}{D} = \frac{Z_{kN}}{D_{kN}\sqrt{1+\dfrac{EX_{kN}^2}{D_{kN}^2}}} + \frac{X_{kN}}{D_{kN}\sqrt{1+\dfrac{EX_{kN}^2}{D_{kN}^2}}} = U_{kN} + V_{kN}$$

Ta thấy $\operatorname{plim}_{k\to\infty} V_{kN} = 0$ đều với mọi N, theo (47)

$U_{kN} \to \mathcal{N}(0,1)$ khi $N \to \infty$ và $k \to \infty$

Áp dụng định lý Anderson (xem [1], tr 425) ta có

$$\frac{S}{D} \to \mathcal{N}(0,1) \text{ khi } N \to \infty$$

là điều cần chứng minh.

Nhận xét: Trong định lý 2, nếu $\lambda \leqslant \frac{1}{2}$ thì định lý không đúng nữa. Thật vậy, giả sử

$$E u_n^2 = \begin{cases} \sigma^2 & n \text{ chẵn} \\ 0 & n \text{ lẻ} \end{cases}$$

Giả sử $a = 0$, nhưng ta không biết và vẫn ước lượng bằng

$$\hat{a} = \left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^2\right)^{-1} \left(-\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n u_{n-1}\right) \equiv 0$$

Nghĩa là phân phối của $\hat{a}$ là suy biến. Như ta vừa thấy, $\hat{a}$ không có phân phối giới hạn thuộc một dạng phân phối nhất định, do đó việc kiểm định giả thiết nói chung khó khăn.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Giáo sư Tiến sĩ Nguyễn xuân Lộc, người đã đặt ra cho tác giả nhiệm vụ nghiên cứu lại mô hình Robinson, đã cung cấp tài liệu và cho nhiều chỉ dẫn quí báu.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Giáo sư Nguyễn văn Hộ và Giáo sư Trần mạnh Tuấn đã tận tình hướng dẫn tác giả và cho những ý kiến hết sức thiết thực và quí báu trong quá trình nghiên cứu.

Nhận ngày 21-4-1986

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Anderson T.W.** (1972), Statistical Analysis of Time series, John Wiley & sons.

2. **Loéve, Michael** (1977), Probability theory.

D.van Nostrand Co., Inc., New york.

3. **Phạm Năng Vũ, Lâm Quang Thiệp, Tôn Tích Ái, Nguyễn San, Trần Nho Lâm** (1983), Địa vật lý thăm dò.

Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp.

4. **Rényi Alfréd** (1973), Valószinüségszámitás (tiếng Hung).

Tankönyvkiadó, Budapest.

5. **Robinson E.A.** (1967), Predictive Deconvolution of time series with application to seismic exploration, Geophysic, Vol. II, N°3 (June, 1967, pp. 418-84).

6. **Robinson E.A.** (1967), Multichannel Time series Analysis with c computer programs San Francisco: Holden-day.

7. **Robinson E.A.** (1980), Co. Physical Application of time series Charlres Griffin

ABSTRACT

The inverse problem of the convolution equation for two time series and application

PHAN DANG CAU

Institute of Computer Science and Cybernetics.

By investigating the Robinson's predictive deconvolution method in processing seismic signal to explore for oil and gas, the author give a more general model with a new interpretation to the randomness of the reflection coefficients which is more suitable to the geological practice.