TẠP CHÍ KHOA HỌC TÍNH TOÁN VÀ ĐIỀU KHIỂN, Tập II (1986), Số 2 (6–9)

VỀ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH HAMMERSTEIN VỚI CÁC TOÁN TỬ ĐƠN ĐIỆU GIÁN ĐOẠN

NGUYỄN BƯỜNG

1. Nhiều bài toán trong kỹ thuật dẫn đến phương trình vi phân hoặc tích phân với phần phi tuyến gián đoạn [1] – [3]. Trong trường hợp đó nghiệm của bài toán theo nghĩa cổ điển, nói chung, không tồn tại. Trong [4], [5], đối với phương trình tích phân loại Hammerstein, các tác giả đưa ra khái niệm Γ – nghiệm và KΓ – nghiệm và sử dụng định lý điểm bất động chứng minh sự tồn tại nghiệm theo nghĩa đó. Trong [6] A.A. Abramov và A. N. Gaipova đưa ra khái niệm nghiệm suy rộng cho lớp phương trình toán tử loại 1 với toán tử đơn điệu gián đoạn, chứng minh sự tồn tại nghiệm theo nghĩa đó và đưa ra phương pháp lặp tìm chúng. Trong [7], [8], đối với bài toán này, các tác giả đã đưa ra thuật toán hiệu chỉnh theo A.H. Tikhonov [9] tìm nghiệm suy rộng (theo nghĩa Abramov – Gaipova). Dựa trên hai khuynh hướng trên, đối với bài toán trong đề bài, chúng tôi đưa ra khái niệm về nghiệm, và xây dựng thuật toán hiệu chỉnh tìm chúng.

2. Cho H là không gian Hilbert thực với $\langle . \rangle$ – tích vô hướng, $\|.\|$ chuẩn tương ứng

Xét phương trình toán tử loại Hammerstein sau:

$$x + F_2 F_1 (x) = f_o, \quad f_o \in H \tag{1}$$

với F_1, F_2 là các toán tử đơn điệu, gián đoạn, nói chung là đa trị, có miền xác định $\mathcal{D}(F_i) = H$ và ảnh trong H.

Gọi $F_i^c(x)$, $i = 1,2$ là bao lồi đóng của tập tất cả các điểm giới hạn yếu của $\{F_i(x_n)\}$, với $x_n \to x$, khi $n \to \infty$. (xem [10]).

Định nghĩa: x_o gọi là nghiệm suy rộng của phương trình (1) nếu:

$$x_o + F_2^c F_1^c (x_o) \ni f_o. \tag{2}$$

Ta nhận thấy:

a) Nghiệm cổ điển chính là nghiệm suy rộng;

b) Nếu F là toán tử tuyến tính, giới nội thì Γ – nghiệm và KΓ – nghiệm [4,5] cũng chính là nghiệm theo nghĩa suy rộng;

c) x_o là nghiệm suy rộng khi và chỉ khi

$$x_o + \overline{F_2}\, \overline{F_1} (x_o) \ni f_o \tag{3}$$

Vì theo [10], $\overline{F_i} = F_i^c$ do $\mathcal{D}(F_i) = H$, với $\overline{F_i}$ là thác triển đơn điệu cực đại của F_i.

Xét phương trình hiệu chỉnh sau:

$$x + F_{2,\alpha} F_{1,\alpha} (x) = f_o \tag{4}$$

với $F_{i,\alpha}$ $F_i + \alpha I$, $\alpha > 0$ – tham số hiệu chỉnh, I là toán tử đơn vị trong H.

Định lý 1. Với mỗi $\alpha > 0$, $f_o \in H$, và điều kiện mục 2 được thỏa mãn, phương trình (4) có duy nhất nghiệm suy rộng x_α. Hơn nữa, nếu S_o – tập nghiệm suy rộng của phương trình (1) khác trống, thì khi $\alpha \to 0$, $x_\alpha \to x_o \in S_o$:

$$\|x_0\|^2 + \|y_0\|^2 = \min_{\substack{x \in S_0 \\ y \in \overline{F_1}(x)}} (\|x\|^2 + \|y\|^2) \tag{5}$$

y_0 là một phần tử duy nhất thuộc $\overline{F_1}(x_0)$.

Chứng minh: Phương trình (1) tương đương với hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} F_1(x) - y = 0 \\ x + F_2(y) = f_0 \end{cases}$$

Ta ký hiệu $H_1 = H \times H$ với tích vô hướng như sau:

$$\langle z_1, z_2 \rangle_1 = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle$$

$$z_i = [x_i, y_i], \quad x_i \in H.\ i = 1,2.$$

và chuẩn tương ứng là $\|\cdot\|_1$. Khi đó hệ phương trình trên viết về dạng:

$$A(z) = \overline{f_0}, \quad \overline{f_0} = [0, f_0] \tag{6}$$

với $A(z) = [F_1(x) - y,\ x + F_2(y)]$, $z = [x,y] \in H_1$. Dễ dàng thấy được A là toán tử đơn điệu trong H_1 có $\mathcal{D}(A) = H_1$. Toán tử đơn điệu $\overline{A}(z) := [\overline{F_1}(x) - y,\ x + \overline{F_2}(y)] = [-y, x] + [\overline{F_1}(x) ; \overline{F_2}(y)]$ là toán tử đơn điệu cực đại vì: $z \to [-y, x]$ là đơn điệu hemi liên tục, giới nội và $z \to [\overline{F_1}(x), \overline{F_2}(y)]$ là toán tử đơn điệu cực đại và kết quả từ [11]. Do $A(z) \subset \overline{A}(z)$, cho nên ta có $\overline{A}$ là thác triển đơn điệu cực đại của A. Tức là $\overline{A} = \hat{A}$. do tính duy nhất của thác triển đơn điệu cực đại của A, khi $\mathcal{D}(A) = H_1$. xem [10]. Như vậy, nếu x_0 là nghiệm suy rộng của phương trình [1], theo nhận xét c) $z_0 = [x_0, y_0]$ với $y_0 \in \overline{F_1}(x_0)$ là nghiệm cổ điển của phương trình sau:

$$\overline{A}(z) = f_0 \tag{7}$$

và ngược lại. Điều đó tương đương với:

$$\langle z' - f_0, z - z_0 \rangle_1 \geqslant 0 \ \forall z \in H_1,\ z' \in \overline{A}(z) \tag{8}$$

Do $\overline{A}$ là thác triển của A, cho nên từ (8) ta có:

$$\langle z' - f_0,\ z - z_0 \rangle_1 \geqslant 0 \quad \forall z \in H_1,\ z' \in A(z) \tag{9}$$

Nếu $z_0 \in H_1$. thỏa mãn (9), từ định nghĩa về A^c. dễ dàng thấy được:

$$\langle z' - f_0,\ z - z_0 \rangle_1 \geqslant 0 \quad \forall z \in H_1,\ z' \in A^c(z) \tag{10}$$

Do $A^c(z) = \overline{A}(z)\ \forall z \in H_1$, cho nên (10) chính là (8), suy ra z_0 chính là nghiệm theo nghĩa Abramov–Gainova [6] của phương trình (6). Ngược lại: Nếu z_0 như trên thì x_0 chính là nghiệm suy rộng của phương trình (1)

Phương trình (4) viết về dạng:

$$A(z) + \alpha z = \overline{f_0} \tag{11}$$

Phần còn lại là áp dụng trực tiếp các kết quả trong [7], [8] cho phương trình (6) và (11).

3. Nếu bây giờ thay thế cho f_0, ta chỉ biết được f_δ : $\|f_\delta - f_0\| < \delta$, $\delta \to 0$. Thì phương trình

$$x + F_{2,\alpha} F_{1,\alpha}(x) = f_\delta, \ \alpha \to 0 \tag{12}$$

với mỗi α, δ có duy nhất nghiệm suy rộng x_α^δ.

Định lý 2. Để cho $x_\alpha^\delta \to x_0$ điều kiện đủ là δ/α, $\alpha \to 0$

Định lý này là áp dụng kết quả trong [6] cho phương trình (6) và phương trình $A(z) + \alpha z = \overline{f_\delta}$ $\quad \overline{f_\delta} = [0, f_\delta]$.

Định lý 3. Nếu nghiệm suy rộng $x_\alpha^\delta \to \overline{x}$, khi $\delta = o(\alpha)$, $\alpha \to 0$ thì $\overline{x}$ chính là nghiệm suy rộng của phương trình (1).

Chứng minh: Gọi $z_\alpha^\delta = [x_\alpha^\delta, F^*_{1,\alpha}(x_\alpha^\delta)]$ là nghiệm suy rộng theo nghĩa Abramov–Gainova của phương trình $A(z)+\alpha z=\overline{f_\delta}$. Lập luận như trong chứng minh định lý 1, z_α^δ chính là nghiệm cổ điển của phương trình $\overline{A}(z)+\alpha z=\overline{f_\delta}$. Do đó ta có:

$$\langle z'+z-f_\delta, z-z_\alpha^\delta\rangle_1 \geqslant 0 \ \forall z\in H_1,\ z'\in\overline{A}(z)$$

vì $\overline{A}(z)\supseteq A(z)\forall z\in H_1$, cho nên suy ra:

$$\langle z'+\alpha z-\overline{f_\delta}, z-z_\alpha^\delta\rangle_1 \geqslant 0 \ \forall z\in H_1,\ z'\in A(z) \qquad (13)$$

Mặt khác: do $x_\alpha^\delta\to\overline{x}$ cho nên $\alpha x_\alpha^\delta\to 0$, và do tính đơn điệu cực đại của $\overline{F_1}$ với miền xác định là toàn không gian, tồn tại lân cận U của $\overline{x}$ sao cho $\overline{F_1}$ giới nội trên U, và với mọi $\alpha\leqslant\alpha_0$ nào đó thì $x_\alpha^\delta\in U$, ta có dãy con ký hiệu luôn là $\overline{F_1}(x_\alpha^\delta)$ hội tụ yếu đến $\overline{y}$. Do đó $\overline{F_1}(x_\alpha^\delta)+$ $+\alpha x_\alpha^\delta\to\overline{y}$ khi $\alpha\to 0$. Suy ra z_α^δ hội tụ yếu trong H_1 đến $\overline{z}=[\overline{x},\overline{y}]$, khi $\alpha\to 0$. Từ (13) cho $\alpha\to 0$, ta được

$\langle z'-\overline{f}, z-\overline{z}\rangle_1 \geqslant 0\ \forall z\in H_1,\ z'\in A(z)$. Suy ra $\overline{x}$ chính là nghiệm suy rộng của phương trình (1). Kết hợp định lý 2 và 3 ta có:

Định lý 4. Với $\delta=o(\alpha)$, $\alpha\to 0$, để cho $x_\alpha^{\delta'}$ hội tụ đến phần tử nào đó thuộc H điều kiện cần và đủ là phương trình (1) có nghiệm suy rộng.

Chú ý: Để tìm nghiệm suy rộng x_α^δ của phương trình hiệu chỉnh (12) có thể áp dụng phương pháp lặp trong [12], theo phương trình (13).

4. Xét hệ phương trình đại số:

$$\begin{cases} x_1+f_1(x_1)+f_2(x_2)=a_1\\ x_2+f_1(x_1)+2f_2(x_2)=a_2\end{cases}$$

$$\text{với}\quad f_1(x_1)=\begin{cases}(x_1-1)^5, & x_1\leqslant 1\\ (x_1-1)^3+1, & x_1>1\end{cases}$$

$$f_2(x_2)=\begin{cases}x_2-1, & x_2\leqslant 1\\ (x_2-1)^5+\frac{1}{2}, & x_2>1.\end{cases}$$

Dễ dàng thấy được với $1<a_1\leqslant 2{,}5$ hoặc $1<a_2\leqslant 3$ không tồn tại điểm x_1, x_2 thỏa mãn hệ phương trình trên. Nếu coi $x=(x_1,x_2)\in R^2$ với tích đề các, khi hệ phương trình trên có dạng (1) với $F_1(x)=(f_1(x_1), f_2(x_2))$ và $F_2(x)=Bx$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ là các toán tử đơn điệu có miền xác định là R^2, ảnh trong R^2. Dễ dàng thấy được $F_2^c=F_2$ và $F_1^c(x)=\overline{F_1}(x)=(f_1^c(x_1), f_2^c(x_2))$ với:

$$f_1^c(x_1)=\begin{cases}[0,1], & x_1=1\\ f_1(x_1), & x_1\neq 1\end{cases}$$

$$f_2^c(x_2)=\begin{cases}\left[0,\frac{1}{2}\right], & x_2=1\\ f_2(x_2), & x_2\neq 1\end{cases}$$

và với mọi $a=(a_1,a_2)\in R^2$ hệ phương trình đại số trên có nghiệm suy rộng, và với $a_1\in(1;2,5]$ và $a_2\in(1;3]$ nghiệm suy rộng trùng với nghiệm cổ điển.

Nhận ngày 17-10-1984

TÀI LIỆU DẪN

1. ДЫПКИН Я. З., Релейные автоматические системы Н. 1974.

2. ЕМЕЛЬЯНОВ С.В., Системы автоматического управления с переменной структурой. Н. 1967.

3. УТКИН В.И., Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой Н. 1974.

4. РАГИМХАНОВ В.К., К вопросу существования решения уравнения Гаммерштейна с разрывными стображениями.

Из. ВУЗ. математика 1975, N° 1, 62 — 70.

5 АЗБЕЛЕВ Н.В., РАГИМХАНОВ Р.К., Интегральное уравнение с разрывным оператором ДИФФ. УРАВН. 1969, Т5, N° 5.

6. АБРАМОВ А.А., ГАИНОВА А. Н., О существовании решений некоторих уравнений, содержащих монотонные разрывные отображения.

ЖВМ е МФ 1972, Т 12, N° 2, 525—528.

7. РЯЗАНЦЕВА И.П., Регуляризация нелинейных уравнений с монотонными разрывными отображениями ЖВИ и МФ 1976, Т16, N° 3, 778-781.

8. РЯЗАНЦЕВА И.П., К вопросу о решениях нелинейных уравнений с разрывными монотонными операторами СИБНР.МАТ.ЖУРН. 1979, Т20 N° 1.

9. ТИХОНОВ А.Н., О регуляризации некорректпо поставленный задач ДАН СССР 1963, Т153, N° 1, 49—52.

10. РЯЗАНЦЕВА И.П., Об уравнениях с полумонотонными разрывными отображениями Мат. заметки 1981, Т30, В1. 143—152.

11. ROCKAFELLAR R.T., On the maximality of sums of nonlinear monotone operators Trans. A.M.S. 1970, V 149, N° 1.

12. ПЕРОВ А.И., ЮРГЕЛАС В.В., О сходимости итерационаого процесса ЖВМ и МФ 1977, N° 4.

РЕЗЮМЕ

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ГАММЕРШТЕИНА С РАЗРЫВНЫМИ МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Вводив обобщенное понятие решения для уравнения: $X+F_2F_1(X)=f_0$ с разрывными, вообще многозначными монотонными операторами F_i, $i=1, 2$, действующими в Гильбертовом пространстве Н, рассматривается регуляризированное уравнение: $x+F_{2,\alpha} F_{1,\alpha}(x)=f_\delta$, $\|f_0-f_\delta\| \leqslant \delta$. $F_{i,\alpha}=F_i+\alpha I$, $\alpha>0$.

I—единичный оператор. Доказивается теорема о оуществовании, одинственности обсбщенного решения x_α^δ регуляризированного уравнения при $\alpha>0$ Утвержд.ается, что существование обобщенного решения исходного уравнения является необходимым и достаточным условием сходимости x_α^δ причем $\delta=o(\alpha)$, $\alpha\to 0$.