TẠP CHÍ KHOA HỌC TÍNH TOÁN VÀ ĐIỀU KHIỂN, Tập II (1986), Số 2 (1-5)

VỀ SỰ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM CỦA MỘT LỚP CÁC PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ

LÊ NGỌC LĂNG
Trường Đại học Mỏ - Địa chất

1 Các ký hiệu, định nghĩa và giả thiết.

Giả thử V và H là những không gian Hilbert, sao cho V được nhúng com-pắc và nằm trù mật trong H. V^* và H^* là các không gian đối ngẫu của V và H. Đồng nhất H với H^* và H^* với một không gian con của V^*, khi đó ta có bao hàm thức $V \subset H \subset V^*$. Tích vô hướng giữa V^* và V cũng như trong H ta ký hiệu $(.,.)$. Ký hiệu $\|.\|$, $|.|$ và $\|.\|_*$ lần lượt là chuẩn trong các không gian V, H và V^*. Giả thử $S = [0, T]$ là một đoạn hữu hạn thuộc R^1 và E là một không gian Banach. Như thông thường, ta ký hiệu $L^p(S; E)$ là không gian của tất cả những hàm bậc p khả tích, xác định trên S và có giá trị trong E.

Để ngắn gọn ta đặt:

$$X := L^2(S; V), \quad Y := L^2(S; H), \quad X^* := L^2(S; V^*).$$

Ký hiệu $\langle .,. \rangle$ là tích vô hướng giữa X^* và X cũng như trong Y.

Khi đó $\forall f \in X^*$, $\forall u \in X$ (hoặc $\forall f, u \in Y$) ta có:

$$\langle f, u \rangle = \int_S (f(t), u(t))\, dt$$

Nếu S được thay bởi đoạn $[0, t] \subset S$ thì ta ký hiệu:

$$X_t := L^2([0, t]; V), \; Y_t := L^2([0, t]; H),$$
$$X_t^* := L^2([0, t]; V^*),$$

và

$$\langle f, u \rangle_t := \int_0^t (f(s), u(s))\, ds \quad \forall f \in X_t^*, \forall u \in X_t \text{ (hoặc } \forall f, u \in Y_t).$$

Để ngắn gọn ta luôn ký hiệu c là một hằng số dương hữu hạn, nó có thể lấy những giá trị khác nhau. Trong từng trường hợp đánh giá, giá trị cụ thể của c không có ý nghĩa. Ký hiệu δ là những hằng số dương có thể chọn bé tùy ý, c(δ) có thể lấy những giá trị khác nhau) là những hằng số dương phụ thuộc δ.

Giả thử A là một toán tử phi tuyến, thỏa mãn các điều kiện sau:

(I.1). $A \in (H \times V \to V^*)$;

(I.2). Phép tương ứng $u \mapsto A(u, v)$ $\forall v \in V$ bất kỳ, là một ánh xạ liên tục và đơn trị từ không gian H vào V^*;

(I.3) $\forall u \in H$; $\|A(u, 0)\|_* \leq M(|u| + 1)$, $M = \text{const}$;

(I.4). $\forall v_1, v_2 \in V$, $\forall u \in H$:

$(A(u, v_1) - A(u, v_2), v_1 - v_2) \geq m\|v_1 - v_2\|^2$, $m = \text{const} > 0$;

(I.5). $\forall v_1, v_2 \in V$, $\forall u \in H$: $\|A(u, v_1) - A(u, v_2)\|_* \leq M\|v_1 - v_2\|$.

Các toán tử thỏa mãn (I.1) – (I.5) được gọi là toán tử biến dạng theo nghĩa lions [1].

Bổ đề 1: Giả thử các điều kiện (I.1) – (I.3) và (I.5) được thỏa mãn. Khi đó $A(u(t), v(t)) \in X^*$, nếu $u \in Y$ và $v \in X$.

Chứng minh: Để đơn giản ta ký hiệu $A(u(t), v(t)) = A(u, v)$ $\forall u \in Y$, $\forall v \in X$. Rõ ràng, nếu u, v là các hàm đơn giản thì A(u, v) cũng là hàm đơn giản. Giả thử $u_n(t) \to u(t)$ trong H và $v_n(t) \to v(t)$ trong V khi $n \to \infty$ $\forall t \in S$. Ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \| A(u_n(t), v_n(t)) - A(u(t), v(t)) \|_* \leqslant \Big\{ \lim_{n\to\infty} \big\{ \| A(u_n(t), v_n(t)) - A(u_n(t), v(t)) \|_*$$

$$+ \| A(u_n(t), v(t)) - A(u(t), v(t)) \|_* \big\} = 0 \ \forall t \in S.$$

Từ đó suy ra, nếu u, v đo được thì A(u, v) cũng đo được.

Mặt khác, $\forall u \in Y$. $\forall v \in Y$, ta có:

$$\| A(u, v) \|^2_{X^*} \leqslant \int_S (\| A(u(s), v(s)) - A(u(s), 0) \|_* + \| A(u(s), 0) \|_*)^2 \, ds$$

$$\leqslant \int_S (M \| v(s) \| + M | u(s) | + M)^2 \, ds < +\infty.$$

Bổ đề đã được chứng minh.

Từ bổ đề 1, ta có thể xem A như một toán tử ánh xạ từ $Y \times X$ vào X^*. Giả thử Λ là một toán tử thỏa mãn các điều kiện sau:

(II.1). $\Lambda \subset X \times X^*$ đơn điệu cực đại (nói chung là toán tử đa trị và được hiểu theo nghĩa của Brézis [2], $\Lambda u := \{ f \mid f \in X^*, [u, f] \subset \Lambda \}$ và $D(\Lambda) := \{ u \mid u \in X, \ \Lambda u \neq \phi \}$)

(II.2). $\langle \Lambda v, v \rangle_t \geqslant a \mid v(t) \mid^2 - b$ $\forall v \in D(\Lambda)$; $a, b = \text{const} > 0$;

(II.3). $\langle \Lambda u - \Lambda v, u - v \rangle_t \geqslant a \mid u(t) - v(t) \mid^2 \forall u, v \in D(\Lambda)$;

(II.4). Tồn tại tập hợp $W := \{ u \mid u \in X, \Lambda u \in X^* \}$ sao cho $W \supset D(\Lambda)$ và nếu trong W ta xác định chuẩn như sau:

$$\| u \|^2_W = \| u \|^2_X + \| u \|^2_{X^*}$$

thì, khi đó, W là một không gian Hilbert được nhúng com–păc trong Y. Xét bài toán sau đây:

$$\Lambda u + A(u, u) \ni f, \ u \in D(\Lambda). \tag{1}$$

Nếu toán tử A không phụ thuộc biến thứ nhất thì bài toán (1) đã được nghiên cứu bởi Brézis [2] và Gajewski – Gröger [3] với toán tử A đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm cũng như các phương pháp xấp xỉ nghiệm của nó đã được đưa ra trong [2, 3]. Mục đích của công trình này là tìm những điều kiện để bài toán (1) tồn tại và duy nhất nghiệm với bất kỳ $f \in X^*$. Các kết quả nhận được ở đây sẽ tổng quát hơn các kết quả đã được đưa ra trong [2, 3].

2. Định lý tồn tại nghiệm đối với bài toán (1).

Định lý 1. Giả thử các điều kiện (I.1)–(I.5), (II.1), (II.2) và (II.4) được thỏa mãn. Khi đó bài toán (1) với bất kỳ $f \in X^*$ có ít nhất một nghiệm.

Chứng minh: Để chứng minh định lý này, ta chia làm 4 bước.

1) Vì giả thiết (I.4), (I.5) và (II.1) nên toán tử $v \mapsto A(u, v)$ $\forall u \in Y$ cố định là đơn điệu mạnh, liên tục Lipschitz từ X vào X^* và toán tử $\Lambda \subset X \times X^*$ đơn điệu cực đại. Từ đó suy ra rằng, $\forall u \in Y$ cho trước, bài toán:

$$\Lambda v + A(u, v) \ni f, \ v \in D(\Lambda) \tag{2}$$

có duy nhất nghiệm. Ta ký hiệu nghiệm này bằng Bu. Rõ ràng B là một ánh xạ từ Y vào $D(\Lambda) \subset W \subset Y$.

Ta sẽ chứng minh rằng, toán tử $B \in (Y \to Y)$ thỏa mãn tất cả điều kiện của định lý Schauder về điểm bất động. Mỗi một điểm bất động của toán tử B rõ ràng là một nghiệm của bài toán (1).

2) Tính liên tục của toán tử B. Dễ dàng thấy rằng, với mỗi $v \in X$, ánh xạ $[s, u] \mapsto A(s, v(s)) \in (S \times H \mapsto V^*)$ thỏa mãn điều kiện Caratheodory và

$$\| f(u, v(s)) \|_* \leqslant \| A(u, v(s)) - A(u, 0) \|_* + \| A(u, 0) \|_* \leqslant M(\| v(s) \| + | (u(s) | + 1).$$

Theo định lý của Kraxnoxelxki [4] về sự liên tục của toán tử Nemeski, ta suy ra tính liên tục của ánh xạ $u \mapsto A(u, v) \in (Y \to X^*) \; \forall v \in X$.

Giả thử $u_n \to u$ trong Y khi $n \to \infty$, $v_n := Bu_n$, $v := Bu$.

Khi đó:

$$0 = \langle \Lambda v_n - \Lambda v + A(u_n + v_n) - A(u, v), v_n - v \rangle$$
$$\geqslant m \| v_n - v \|^2_X - \| A(u_n, v) - A(u, v) \|_{X^*} \| v_n - v \|_X$$
$$\geqslant \frac{m}{2} \| v_n - v \|^2_X - \frac{1}{2m} \| A(u_n, v) - A(u, v) \|^2_{X^*}.$$

Vì toán tử $u \mapsto A(u,v) \in (Y \to X^*)$ liên tục, nên suy ra, nếu $u_n \to u$ trong Y khi $n \to \infty$ thì: $\lim_{n\to\infty} \| Bu_n - Bu \|_X = \lim_{n\to\infty} \| v_n - v \|_X = 0$. Điều đó chứng tỏ B là ánh xạ liên tục từ Y vào Y.

3) Tính com-păc của toán tử B. Giả thử $v := Bu$, khi đó ta có:

$$0 = \langle \Lambda v + A(u, v) - f, v \rangle \geqslant -b + \langle A(u, v) - A(u, 0), v \rangle + \langle A(u, 0) - f, v \rangle$$
$$\geqslant -b + m \| v \|^2_X - \frac{1}{2m} \| A(u, 0) - f \|^2_{X^*} - \frac{m}{2} \| v \|^2_X$$
$$\geqslant \frac{m}{2} \| v \|^2_X - c (\| u \|^2_X + 1).$$

Suy ra:

$$\| v \|_X \leqslant c (\| u \|_Y + 1).$$

Mặt khác, ta có:

$$\| \Lambda v \|_{X^*} = \| f - A(u, v) \|_{X^*} = \| f - A(u, v) - A(u, o) + A(u, o) \|_{X^*}$$
$$\leqslant \| f \|_{X^*} + c \| v \|_X - c (\| u \|_Y + 1)$$
$$\leqslant c (\| u \|_Y + 1).$$

Do đó

$$\| v \|_W = (\| v \|^2_X + \| \Lambda v \|^2_{X^*})^{1/2} \leqslant c(\| u \|_Y + 1).$$

Như vậy, toán tử B ánh xạ một tập giới nội trong Y vào một tập giới nội trong W. Vì W được nhúng com-păc trong Y nên từ đó suy ra được tính com-păc của toán tử $B \in (Y \to Y)$

4) Ta sẽ chỉ ra rằng, toán tử B ánh xạ một tập lồi, giới nội, đóng trong Y vào chính nó, $\forall t \in S$ ta có:

$$0 = \langle \Lambda v, v \rangle_t + \int_0^t (A(u(s), v(s)) - f(s), v(s))\, ds \geqslant a | v(t) |^2 - b +$$
$$+ \int_0^t (A(u(s), v(s)) - A(u(s), 0) + A(u(s), 0) - f(s), v(s))\, ds$$

$$\geq a\,|v(t)|^2 - b + m\int_0^t \|v(s)\|^2 ds - \int_0^t \{M(|u(s)|+1) + \|f(s)\|_* \|v(s)\|\} ds$$

$$\geq a\,|v(t)|^2 - b + (m-\delta)\int_0^t \|v(s)\|^2 ds - c(\delta)\int_0^t (|u(s)|^2 + 1 + \|f(s)\|^2_*) ds.$$

Chọn $\delta < m$, khi đó $\forall t \in S$ ta nhận được:

$$|v(t)|^2 \leq C\,(1 + \int_0^t |u(s)|^2 ds), \quad \text{trong đó } C = \text{const} > 0.$$

Suy ra:

$$\int_S e^{-2Ct}|v(t)|^2 dt \leq \int_S e^{-2Ct}\, C\,(1 + \int_0^t \|u(s)|^2 ds)\, dt$$

$$\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_S e^{-2Ct}|u(t)|^2 dt$$

Đặt $E := \{u \mid u \in y, \int_S e^{-2Ct}|u(t)|^2 dt \leq 1\}$. Rõ ràng E là một tập lồi, giới nội, đóng trong Y. Từ bất đẳng thức cuối ta suy ra, nếu $u \in E$ thì $v = Bu \in E$, nghĩa là $B \in (E \to E)$. Theo định lý Schauder về điểm bất động, toán tử B có ít nhất một điểm bất động trong $E \subset Y$. Định lý 1 được chứng minh xong.

3. Định lý duy nhất nghiệm đối với bài toán (1).

Các giả thiết (I.1)–(I.5), (II.1), (II.2) và (II.4) chỉ bảo đảm tính chất tồn tại nghiệm của bài toán (1) chứ không bảo đảm tính duy nhất. Một vấn đề được đặt ra là, cần phải thêm vào điều kiện nào nữa cho toán tử A để, một mặt bảo đảm tính duy nhất nghiệm của bài toán, mặt khác, trong thực tế, có thể sử dụng được dễ dàng. Cụ thể ta có giả thiết sau:

(I.6). Giả thử $u \in D(\Lambda)$, W là một nghiệm của bài toán (1.). Khi đó:

$$\varphi_{m_o}(u(.)) \in L^2(S)\ \forall m_o \in (0;\ m), \text{ với}$$

$$\varphi_\delta(u) := \max\left\{ 0;\ \sup_{\substack{z \neq 0 \\ z \in V}} \frac{1}{|z|}(\|A(u+z,u) - A(u,u)\|_* - \delta\|z\|) \right\},\ u \in V.$$

Trong những ứng dụng cụ thể, giả thiết (I.6) có thể xem như một tính chất chính quy của nghiệm của bài toán (1).

Bổ đề 2. Giả thử điều kiện (I.4) được thỏa mãn, khi đó $\forall u, z \in V$ và $m_o \in (0, m)$ ta có:

$$(A(u+z, u+z) - A(u,u), z) \geq m_1\|z\|^2 - \rho(u)\,|z|^2,$$

$$\text{với } m_1 := \frac{m - m_o}{2},\ \rho(u) := \frac{1}{2(m - m_o)}(\varphi_{m_o}(u))^2.$$

Chứng minh: Từ định nghĩa φ_{m_o} ta suy ra $\forall u, z \in V$ $(A(u+z, u+z) - A(u,u), z)$

$$= (A(u+z, u+z) - A(u+z, u) + A(u+z, u) - A(u,u), z)$$

$$\geq m\|z\|^2 - (m_o\|z\| + \varphi_{m_o}(u)\,|z|)\,\|z\|$$

$$\geqslant (m - m_0) \| z \|^2 - \frac{m - m_0}{2} \| z \|^2 - \frac{1}{2(m - m_0)} (\varphi_{m_0}(u) |z|)^2$$

$$\geqslant m_1 \| z \|^2 - \rho(u) |z|^2.$$

Bổ đề được chứng minh xong.

Chú ý 1. Giả thiết (I.6) có thể viết dưới dạng

$$\rho(u(.)) \in L^1(S) \tag{3}$$

Định lý 2. Giả thử các điều kiện (I.1) — (I.6) và (II.1) — (II.4) được thỏa mãn. Khi đó, bài toán (1) có duy nhất một nghiệm với mọi $f \in X^*$.

Chứng minh: Giả thử u_1 là một nghiệm của (1) thỏa mãn (3), u_2 là một nghiệm khác của (1). Đặt $z := u_2 - u_1$. Từ bổ đề 2 ta có $\forall t \in S$

$$0 = \langle \Lambda u_2 - \Lambda u_1, z \rangle_t + \int_0^t (A(u_2, u_2) - A(u_1, u_1), z)\, ds$$

$$\geqslant a |z(t)|^2 + \int_0^t (A(u_1(s) + z(s), u_1(s) + z(s)) - A(u_1(s), u_1(s), z(s))\, ds$$

$$\geqslant a |z(t)|^2 + \int_0^t (m_1 \| z(s) \|^2 - \rho(u_1(s)) |z(s)|^2)\, ds.$$

Sử dụng bổ đề Gronwall ta suy ra $z = 0$, nghĩa là $u_1 = u_2$. Định lý 2 được chứng minh xong.

Trong công trình sau [5], chúng ta sẽ ứng dụng kết quả lý thuyết này cho bài toán giá trị ban đầu dạng phương trình tiến hóa và bài toán hỗn hợp đối với hệ thống phương trình đạo hàm riêng phi tuyến.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Lions J. L.**, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires Paris 1968.

2. **Brezis H.**, Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contraction dans les espaces de Hilbert. Math. Studies 5, North Holland 1973.

3. **Gajewski H., Groger K.**, Ein Iterationsverfahren für Gleichung mit einem maximal monotonen und einem stark monotonen Lipschitz-stetigen Operator. Math. Nachr. 69, 307-317 (1975).

4. **Kraxnoxelxki M.A.**, Topologicheckie metodu v teorii nelineinukh integralnuch uravnenii. Goxtekhizdat, M., 1956.

5. **Lê Ngọc Lăng**, Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của một lớp các bài toán giá trị ban đầu dạng phương trình tiến hóa. Tạp chí Khoa học tính toán và điều khiển 1986 (sẽ đăng).

ABSTRACT

Existence and uniqueness theorems for a class of nonlinear operator equation.

In this paper we consider problems of the type

$$\Lambda u + A(u,u) \ni f,\ u \in D(\Lambda),$$

where Λ is maximal monotone and A is an operator of the variation type (Lions [10]). We prove an existence and uniqueness result for above problem, using fixed piont theorem of Schauder. Our results are slight generalizations of the results of Browder [6] on problems of the type $\Lambda u + A(u) \ni f$, $u \in D(\Lambda)$.