

## ĐỘ PHỨC TẠP TÍNH TOÁN CỦA MỘT SỐ THUẬT TOÁN NỘI SUY HÀM HAI BIẾN

HOÀNG TRUNG DU

*Viện Khoa học tính toán và điều khiển*

**Tóm tắt:** Trong bài này chúng tôi trình bày một quan niệm về độ phức tạp tính toán của bài toán xấp xỉ hàm hai biến bằng các thuật toán nội suy. Hai thuật toán chủ yếu được nêu ra là thuật toán tích (T) và thuật toán Blending (B). Độ phức tạp của chúng được tính cụ thể với đơn vị thời gian tính là số lần ước lượng giá trị của hàm cho mỗi thuật toán.

### I - MỘT SỐ KHÁI NIỆM VỀ ĐỘ PHỨC TẠP TÍNH TOÁN CỦA BÀI TOÁN XẤP XỈ BẰNG PHƯƠNG PHÁP NỘI SUY

Xuất phát từ yêu cầu thực tế về các vấn đề ứng dụng máy tính để giải các bài toán một cách có hiệu quả, người ta đã nghiên cứu và đưa ra nhiều thuật toán, song hiệu lực và việc thực hiện chúng thế nào là do độ phức tạp của chính bản thân chúng. Việc nghiên cứu độ phức tạp tính toán là để đánh giá được vấn đề đó. Trong báo cáo tại trường hè về giải tích số năm 1984, Phan Đình Diệu [2] đã trình bày những khái niệm và các kết quả gần đây của việc nghiên cứu độ phức tạp. Về bài toán xấp xỉ J. Rice [8] đã xét cho các toán tử xấp xỉ tốt nhất hàm một biến và M.H. Schultz [9] đã đề cập đến bài toán nội suy tổng quát. Trong báo cáo này chúng tôi đưa ra một vài khái niệm về độ phức tạp cho bài toán nội suy hàm hai biến và tính cụ thể cho một số thuật toán.

Như ta biết, độ phức tạp tính toán là một độ đo về chi phí mà một máy trừu tượng đòi hỏi để hoàn thành một nhiệm vụ. Các chi phí đó phụ thuộc vào mô hình được sử dụng. Chúng có thể là đơn vị thời gian trong tính toán song song, số lần so sánh trong các thuật toán phân loại hoặc khối lượng bộ nhớ cần phải sử dụng. Ở đây chúng tôi cũng lấy tiêu chuẩn thời gian làm số đo độ phức tạp mà đơn vị của nó là một lần tính giá trị hàm. Như ta biết, trong các thuật toán nội suy có thể sử dụng đến hàng nghìn lần trong một tính toán máy tính và chỉ cần mỗi lần tính khoảng một giây thôi thì sự chi phí cũng rất lớn. Mặt khác ta cũng dễ nhận thấy là việc chọn như vậy cũng đặc trưng được cho thời gian toàn bộ để giải bài toán vì nếu số lần ước lượng hàm nhiều thì cũng kéo theo số thời gian phải tính toán hàm cơ sở nhiều và ngược lại, điều này ta sẽ thấy ở phần II.

Bài toán xấp xỉ hàm hai biến bằng nội suy ta thường gặp trong việc giải các bài toán trong thực tế, như giải phương trình vi phân đạo hàm riêng bằng phương pháp phần tử hữu hạn, do đó việc nghiên cứu chúng trong những năm gần đây cũng được phát triển mạnh [2, 3, 4, 5]. Cụ thể nó được phát biểu như sau:

Cho  $\Omega = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$  và lưới điểm chữ nhật  $(x_i, y_j)$  trên  $\Omega$  và hàm  $f \in K(\Omega)$ , là không gian tuyến tính định chuẩn. Hãy xây dựng một hàm  $Pf$  xấp xỉ  $f$  với độ chính xác  $\epsilon$  và lấy các giá trị của  $f$  trên lưới điểm  $(x_i, y_j)$ , tức là

$$a) \|Pf - f\|_{K(\Omega)} < \epsilon$$

$$b) Pf(x_i, y_j) = f(x_i, y_j), (x_i, y_j) \in \Omega_{ij}$$

với  $\Omega_{ij}$  là lưới chữ nhật trên  $\Omega$ . Số điểm lưới sẽ được xác định sau.

Bài toán đó ta sẽ ký hiệu là P.

**Định nghĩa 1.1.** A được gọi là thuật toán nội suy đối với lớp hàm  $H(\Omega)$ , nếu với mỗi  $f \in K(\Omega)$ , A cho ta một hàm nội suy  $Pf$  xấp xỉ  $f$  với độ chính xác  $\epsilon$  cho trước.

Ta biết rằng những thuật toán như thế luôn luôn tồn tại và ta ký hiệu tập của tất cả các thuật toán giải P là  $\mathcal{A}$ . Với cách chọn đơn vị thời gian như ở trên, ta sẽ định nghĩa độ phức tạp của thuật toán.

**Định nghĩa 1.2.** Số lần giá trị hàm cần có thể xây dựng được hàm  $Pf$  đối với hàm  $f \in K(\Omega)$  và  $\epsilon > 0$  cho trước, được gọi là độ phức tạp của thuật toán A. Và ký hiệu là  $N = N(A, f, \epsilon)$ .

Trong thực tế ta không thể xác định được tính hữu hạn của  $\mathcal{A}$  nếu một cận dưới của  $\mathcal{A}$  đối với P không cho ta việc tồn tại một  $A \in \mathcal{A}$  mà có độ phức tạp đúng bằng cận đó và vì vậy ta cũng không định nghĩa được độ phức tạp của P.

**Định nghĩa 1.5.** Thuật toán A được gọi là xấp xỉ tốt hơn thuật toán  $A'$  nếu với  $f \in K(\Omega)$  ta có:

$$N(A, f, \epsilon) \leq N(A', f, \epsilon).$$

**Định nghĩa 1.6.**  $A \in \mathcal{A}$  được gọi là thuật toán nội suy tốt nhất đối với hàm  $f \in K(\Omega)$  nếu

$$N(A, f, \epsilon) \leq N(A', f, \epsilon), \forall A' \in \mathcal{A}.$$

Với những khái niệm vừa nêu, trong phần tiếp theo chúng tôi sẽ xét đến mức độ phức tạp của các thuật toán tích (T) và thuật toán blendinh (B). Những chi tiết cụ thể của chúng đã được trình bày trong [1, 3, 4, 5].

## II - THUẬT TOÁN T VÀ ĐỘ PHỨC TẠP CỦA NÓ

Cơ sở của hai thuật toán T và B là các toán tử nội suy một biến, do đó để có được một phép nội suy hàm hai biến tốt ta phải chọn các toán tử nội suy một biến có độ xấp xỉ tốt. Ở đây chúng tôi chọn toán tử  $T: f \rightarrow Tf$ , với  $f$  là hàm xác định trên đoạn  $[0,1]$ , có dạng

$$Tf(x) = \sum_{i=1}^m f(x_i) \varphi_i(x); \varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (2.1)$$

Với  $x_i$  là các điểm chia đều  $[0,1]$  thành  $m-1$  đoạn bằng nhau,  $\varphi_i(x)$  là các hàm spline cơ sở bậc  $2n-1$ , thỏa mãn điều kiện biên tự nhiên (xem I.J. Schoenberg, Cardinal Splines Interpolation. SIAM 1974). Trong trường hợp đó sai số được đánh giá qua bất đẳng thức sau:

$$\|Rf\| = \|f - Tf\| \leq C \|f^{(2n)}\| h^{2n} \quad (2.2)$$

Chuẩn được sử dụng là chuẩn đều trong không gian hàm liên tục, C là hằng số chỉ phụ thuộc vào n và n độc lập với m.

Ta nhận thấy rằng, có thể chọn (2.1) và (2.2) tổng quát hơn sao cho chúng đảm bảo được tính chất là sai số được ước lượng dưới dạng  $C(f, n) h^{\alpha(n)}$ , với n không phụ thuộc m. Với việc chọn  $Tf$  như (2.1) ta có thể xử lí hàm hai biến như hàm một biến với việc cố định biến còn lại và xem như là tham số. Khi đó với hàm  $f \in K(\Omega)$  ta có  $Tx: f \rightarrow Txf$  và

$$Txf(x, y) = \sum_{i=1}^m f(x_i, y) \varphi_i(x) \quad (2.3)$$

và tương tự như vậy ta có

$$Tyf(x, y) = \sum_{j=1}^m f(x, y_j) \varphi_j(y) \quad (2.3)$$

Như vậy là trong trường hợp này ta đã chọn lưới vuông và với cách chọn đó ta có các ước lượng tương ứng như ở (2.2), nghĩa là

$$\|Rxf\| \leq \alpha \|f^{(2n, 0)}\| h^{2n} \quad (2.4)$$

và

$$\|Ryf\| \leq \alpha \|f^{(0,2n)}\| h^{2n} \quad (2.4')$$

với  $f \in C^{2n, 2n}(\Omega)$  và

$$f^{(\gamma, \beta)}(x, y) = \frac{\partial^{\gamma+\beta} f(x, y)}{\partial x^{\gamma} \partial y^{\beta}}$$

Bây giờ ta nêu thuật toán T.

Thuật toán T. Cho tập

$$X = \{ih \mid i = 0, 1, 2, \dots, 1/h\}, \quad (2.5)$$

tính các giá trị của  $f(x, y)$  trên  $X \times X$ , xây dựng  $T_x f$  và  $T_y f$  như ở (2.3) và (2.3'), sau đó thiết lập toán tử tích  $T_x T_y f$ .

Đề đảm bảo cho tính đúng đắn của thuật toán T phải chỉ ra được là một khi  $T_x f$  và  $T_y f$  là các toán tử xấp xỉ khá tốt thì  $T_x T_y f$  cũng cho ta xấp xỉ tốt. Điều đó được phát biểu qua định lý sau:

**Định lý 2.1.** Nếu hai dãy vô hạn  $\{\varphi_i(x), i = 1, 2, \dots\}$  và  $\{\psi_j(y), j = 1, 2, \dots\}$  thỏa mãn điều kiện hội tụ đều, khi đó với bất kỳ hàm liên tục  $f(x, y)$  nào và với  $\varepsilon > 0$ , tồn tại một số  $n$  sao cho  $f(x, y)$  có thể xấp xỉ bằng tổ hợp tuyến tính của các hàm  $\varphi_i(x), \psi_j(y), i, j = 1, n$ .

Định lý này đã được chứng minh bằng nhiều cách, năm 1969 Weinstein đã chứng minh trong trường hợp chúng là các hệ Markov. Bây giờ ta sẽ chứng minh định lý:

**Định lý 2.2.** Cho  $f \in C^{2n, 2n}(\Omega)$  và  $\varepsilon > 0$ , khi đó độ phức tạp của thuật toán T sẽ là:

$$N(T, f, \varepsilon) = \left( \frac{C(f, n)}{2\varepsilon} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.6)$$

$C(f, n)$  là hằng số phụ thuộc  $f$  và  $n$ .

**Chứng minh:** Ta nhận xét rằng việc chọn không gian  $C^{2n, 2n}(\Omega)$  phải đảm bảo được tính thỏa mãn cho các điều kiện tự nhiên của các hàm cơ sở và do đó thực chất chỉ một bộ phận của  $C^{2n, 2n}$  song chuẩn vẫn là chuẩn đều trên  $\Omega$  (điều kiện biên tự nhiên ở đây có cả với đạo hàm hỗn hợp).

Từ (2.3) và (2.3') ta dễ dàng nhận thấy rằng

$$T_x T_y f(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \varphi_i(x) \psi_j(y) \quad (2.7)$$

và

$$(I - T_x T_y) f = [I - (I - R_x)(I - R_y)] f = (R_x + R_y - R_x R_y) f$$

với  $I$  là toán tử đồng nhất và do đó trên cơ sở của (2.4), (2.4') ta có:

$$\begin{aligned} \| (I - T_x T_y) f \| &\leq \| R_x f \| + \| R_y f \| + \| R_x R_y f \| \\ &\leq \alpha (\| f^{(2n, 0)} \| + \| f^{(0, 2n)} \|) h^{2n} + \beta \| f^{(2n, 2n)} \| h^{4n} = C(h^{2n} + h^{4n}) \end{aligned}$$

với  $\beta$  là hằng số phụ thuộc  $n$  và

$$C = \max \{ \alpha (\| f^{(2n, 0)} \| + \| f^{(0, 2n)} \|), \beta \| f^{(2n, 2n)} \| \} \quad (2.8)$$

và vì  $h \leq 1$  nên

$$h^{2n} + h^{4n} = h^{2n} (1 + o(h^{2n})) \approx h^{2n}.$$

Cuối cùng ta có:

$$\| (I - T_x T_y) f \| \leq Ch^{2n}.$$

Bây giờ ta xấp xỉ với độ chính xác  $2\varepsilon$ , tức là ta phải chọn bước  $h$  thỏa mãn đẳng thức

$$Ch^{2n} = 2\varepsilon \Rightarrow h = \left( \frac{2\varepsilon}{C} \right)^{\frac{1}{2n}}.$$

Mặt khác trong thuật toán ta phải sử dụng  $m^2$  giá trị của  $f$  và  $m = 1 + 1/h \approx 1/h$ . Từ đó ta có:

$$N(T, f, \varepsilon) \approx \frac{1}{h^2} = \left(\frac{L}{2\varepsilon}\right)^2$$

*Nhận xét:* Kết quả này hoàn toàn phù hợp với kết quả ở [10], ở đó Vituskin đã chỉ ra rằng số lượng thông tin ít nhất cần để xấp xỉ theo bảng là bậc của  $(L/\varepsilon)^{2/k}$  với  $L$  là hằng số giới nội của đạo hàm bậc  $k$ .

### III - THUẬT TOÁN B VÀ ĐỘ PHỨC TẠP CỦA NÓ

Như ta đã biết thuật toán B là thuật toán phát triển và mở rộng của thuật toán T, vì T như một trường hợp đặc biệt của nó [3,5], và thực chất nó là phương pháp phân tích liên tục thành hai bước. Bước thứ nhất là hàm nội suy sẽ trùng với hàm được nội suy trên các đường lưới và bước thứ hai là sẽ làm trùng trên các điểm rời rạc. Vì lẽ đó ta phải sử dụng nhiều toán tử một biến hơn mà cụ thể là bốn (mỗi bước phải hai toán tử). Ở bước đầu ta cũng sử dụng hai toán tử như ở (2.3) và (2.3') với  $m = m_1$ , nhưng sẽ tác dụng lên  $f$  như tổng Bool của  $T_x$  và  $T_y$ ; cụ thể là

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx (T_x \odot T_y) f(x, y) = T_x f(x, y) + T_y f(x, y) - T_x T_y f(x, y) \\ &= \sum_{i=1}^{m_1} f(x_i, y) \varphi_i(x) + \sum_{j=1}^{m_1} f(x, y_j) \varphi_j(y) - \sum_{i,j=1}^{m_1} f(x_i, y_j) \varphi_i(x) \varphi_j(y) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ta thấy là trong các tổng thứ nhất và hai ở vế phải của (3.1) còn các hàm  $f(x_i, y)$  và  $f(x, y_j)$  mà nhiệm vụ của bước thứ hai phải dùng các toán tử cùng loại (2.1) là  $T^{*y} f$  và  $T^{*x} f$  để tác dụng tiếp lên chúng. Trong trường hợp đó các sai số  $R^{*y} f$  và  $R^{*x} f$  cũng có các đánh giá tương tự như (2.2) và ở đây ta sẽ sử dụng  $m_2$  thay cho  $m_1$  ở trên. Và để cho sai số qua hai quá trình tương thích với nhau [5] ta lấy  $m_2 \gg m_1$ .

*Thuật toán B.* Cho các tập

$$X = \{ih_1 \mid i = 0, 1, 2, \dots, 1/h_1\}$$

và

$$Y = \{jh_2 \mid j = 0, 1, 2, \dots, 1/h_2\}$$

(3.2)

Tính các giá trị của  $f(x, y)$  trên  $X \times X$ ,  $X \times Y$ ,  $Y \times X$ , xây dựng  $T_x$ ,  $T_y$  trên  $X$  và  $T^{*x}$ ,  $T^{*y}$  trên  $Y$  dưới dạng (2.1), sau đó thiết lập toán tử  $T^{*x} T_y f + T^{*y} T_x f - T_x T_y f$ .

Để thuận tiện trong tính toán thường ta lấy  $Y$  như tập mịn của  $X$ , tức là các điểm của  $X$  đều thuộc  $Y$ . Ta sẽ chứng minh định lý:

*Định lý 3.1.* Cho  $f \in C^{2n, 2n}(\Omega)$  và  $\varepsilon > 0$ , khi đó độ phức tạp của thuật toán B sẽ là:

$$N(B, f, \varepsilon) = 2 \left(\frac{C^*}{\varepsilon}\right)^{\frac{3}{4n}} \quad (3.3)$$

với  $C^* = C^*(f, n)$  là hằng số.

*Chứng minh:* Trước hết ta tính sai số sau bước xấp xỉ thứ nhất:

$$\begin{aligned} (I - T_x \odot T_y) f &= (I - T_x - T_y + T_x T_y) f \\ &= (I - (I - R_x) - (I - R_y) + (I - R_x)(I - R_y)) f = R_x R_y f \end{aligned} \quad (3.4)$$

Sau khi sử dụng bước thứ hai ta có

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx \Pi f(x, y) = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} f(x_i, y_j) \varphi_i(x) \psi_j(y) \\ &+ \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} f(x_j, y_i) \varphi_j(y) \psi_i(x) - \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_1} f(x_i, y_j) \varphi_i(x) \varphi_j(y). \end{aligned}$$

Để ước lượng sai số qua bước thứ 2 ta viết (3.1) dưới dạng sau :

$$f = (Tx I + I Ty - Tx Ty + Rx Ry) f \quad (3.5)$$

và thay  $I = T^*x + R^*x$  và  $I = T^*y + R^*y$  vào (3.5) ta được :

$$f = (T^*yTx + T^*xTy - Tx Ty + Tx R^*y + Ty R^*x - Rx Ry) f \quad (3.6)$$

Do đó

$$\begin{aligned} \|(I - \Pi) f\| &= \|(Tx R^*y + Ty R^*x - Rx Ry) f\| \leq \|Tx\| \|R^*y f\| + \|Ty\| \|R^*x f\| + \|Rx Ry f\| \\ &\leq \alpha^* \|Tx\| \|f\|_{h_2}^{(0,2n)} + \alpha^* \|Ty\| \|f\|_{h_2}^{(2n,0)} + \beta^* \|f\|_{h_1}^{(2n,2n)} \\ &= C^* (h_2^{2n} + h_1^{4n}) \end{aligned}$$

với  $\alpha^*, \beta^*$  là các hằng số tương ứng với  $\alpha$  và  $\beta$  và

$$C^* = \max \{ \alpha^* (\|Tx\| \|f\|_{h_2}^{(0,2n)} + \|Ty\| \|f\|_{h_2}^{(2n,0)}) + \beta^* \|f\|_{h_1}^{(2n,2n)} \} \quad (3.8)$$

Từ (3.7) ta nhận thấy rằng để cho sai số của hai bước cùng bậc hội tụ thì ta phải chọn  $T^*x, T^*y$  với độ chính xác cao hơn  $Tx$  và  $Ty$ . Nếu ta cùng xấp xỉ với độ chính xác là  $2\varepsilon$  thì ta sẽ chọn  $h_1$  và  $h_2$  sao cho

$$C^* h_1^{4n} = \varepsilon \Rightarrow h_1 = \left( \frac{\varepsilon}{C^*} \right)^{\frac{1}{4n}}$$

và

$$C^* h_2^{2n} = \varepsilon \Rightarrow h_2 = \left( \frac{\varepsilon}{C^*} \right)^{\frac{1}{2n}}$$

từ đó ta dễ dàng nhận thấy là  $h_2 = h_1^2 = h_2$  và thực chất là  $X \subset Y$ . Mặt khác tổng số điểm cần

để xây dựng  $Hf$  là  $m_1 m_2 + m_1 m_2 - m_1 m_1 = 2m_1 m_2 - m_1^2$  và vì  $m_1 \ll m_2$  do đó  $N(B, f, \varepsilon) \approx 2m_1 m_2$ , mà ta lại có

$$m_1 = 1 + \frac{1}{h_1} \approx \frac{1}{h_1}, \quad m_2 = 1 + \frac{1}{h_2} \approx \frac{1}{h_2} = \frac{1}{h_1^2}$$

do đó

$$N(B, f, \varepsilon) \approx 2m_1 m_2 \approx \frac{2}{h_1^3} = 2 \left( \frac{C^*}{\varepsilon} \right)^{\frac{3}{4n}}$$

#### IV-DÁNG ĐIỀU TIỆM CẬN CỦA $N(T, F, \varepsilon)$ VÀ $N(R, F, \varepsilon)$

Ta sẽ chứng minh định lý sau :

**Định lý 4.1.** Cho  $\varepsilon > 0, f \in C^{2n, 2n}(\Omega), n \in \mathbb{N}$ .

Thuật toán B xấp xỉ  $f$  tốt hơn thuật toán T nếu

$$C^* \leq 2^{-\frac{4}{3}} (n+1) \frac{C\sqrt{C}}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (4.1)$$

với  $C$  và  $C^*$  được định nghĩa ở (2.8) và (3.8).

**Chứng minh:** Từ (2.4) và (3.2) ta có

$$\rho(f, \varepsilon) = \frac{N(B, f, \varepsilon)}{N(T, f, \varepsilon)} = 2 \frac{n+1}{n} \frac{1}{\varepsilon^{4n}} \frac{C^* \frac{3}{4n}}{\frac{1}{C^n}} \quad (4.2)$$

Đặt  $\rho(f, \varepsilon) < 1$  và từ (4.2) ta suy ra

$$C^* 4n < 2 \frac{n+1}{n} \varepsilon - \frac{1}{4n} \frac{1}{C^* n}$$

hay 
$$C^* < 2 \frac{1}{3} (n+1) \varepsilon - \frac{1}{3} \frac{4}{C^* 3}$$

*Hệ quả 4.1.* Nếu trong tất cả các toán tử một biến ta dùng hàm cơ sở là hàm spline bậc 3 thì thuật toán B xấp xỉ  $f$  tốt hơn thuật toán T khi

$$C^* < \frac{C\sqrt{C}}{16\sqrt{\varepsilon}} \quad (4.3)$$

vì trong trường hợp này ta đã lấy  $n = 2$ .

Nhận ngày 16-5-1985

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Delvos P.J., On discrete trivariate blending interpolation, ISNM 61 (1982), Birkhauser Verlag Basel, pp. 89-105.
2. Phan Đình Diệu và Lê Công Thành, Độ phức tạp tính toán của các thuật toán Trường hệ « Giải tích số và lập trình », Sầm Sơn, Thanh Hóa, 1984, pp. 1-17.
3. Hoàng Trung Du, Derivarea partiala numerica a functiilor de mai multe variabile, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica (1976) pp. 51-60.
4. Hoàng Trung Du, Blending function method and Theory of Sard's system, Preprint, serie N°15 (1984), Hanoi.
5. Gordon W.J., The Method of Successive Decomposition for Multivariate Interpolation, SGMR-1281 (1972).
6. Laurent P.J., Approximation et Optimisation, Herman, Paris 1972.
7. Rice J., On the Computational Complexity of Approximation operators II, In « Analytic Computational Complexity » ed by J.F. Tranb (1977), pp. 191-204, Acad. Press.
8. Powell M.J.D., Numerical Methods for fitting functions of two variables. In « The state of the Art in Numerical Analysis », ed. by D. Jacobs, Acad. Press 1977, pp. 563-603.
9. Schultz M.H., Complexity and Differential Equations, In « Analytic Computational Complexity », ed. by J.F. Tranb, Acad. Press 1977, pp. 143-150.
10. Vitushkin A.G., Theory of the Transmission and Processing of Information, Pergamon Press, New York, 1961.

#### ABSTRACT

#### Computational Complexity of Some Algorithms for Interpolation of Bivariate Functions

In this paper we present some concepts of computational complexity of the approximation problem of bivariate function by the Interpolation algorithms. Two algorithms are then presented: product algorithm (T) and blending algorithm (B). Their complexity and computed concrete with computed time unity is one optimization of function value.