

MỘT PHƯƠNG PHÁP RÚT GỌN TÍNH TOÁN MA TRẬN HIỆP PHƯƠNG SAI TRONG VIỆC ƯỚC LƯỢNG TRẠNG THÁI CỦA CÁC HỆ LIÊN TỤC VỚI QUAN SÁT RỜI RẠC

VŨ NHƯ LÂN

I - MỞ ĐẦU

Trong quá trình giải bài toán ước lượng ở thời gian thực, thường xuất hiện vấn đề cùng một lúc phải đảm bảo độ chính xác của ước lượng và khối lượng tính toán nhỏ nhất. Việc đó nhiều khi dẫn đến những khó khăn lớn. Thời gian gần đây có hàng loạt công trình đề cập đến vấn đề trên [1, 2, 3, 4]. Các phương pháp này chủ yếu dựa trên giả thiết rằng các biến trạng thái không được quan sát đầy đủ tại từng thời điểm, tuy nhiên quan sát được liên tục với sai số dạng tạp trắng. Trong khi đó có một lớp hệ kỹ thuật (ví dụ luyện kim, các thiết bị hóa, các vật bay, ...) vì nguyên nhân kinh tế hay hạn chế về kỹ thuật, không thể quan sát được một cách liên tục ở từng thời điểm. Đối với các hệ này, nhu cầu tính toán lớn hơn nhiều so với hệ thuần túy ở [1, 2, 3, 4], vì thế việc giảm bớt khối lượng tính toán đóng vai trò thiết thực cho các hệ kỹ thuật. Trong bài này đề xuất một phương pháp giảm nhẹ khối lượng tính toán bộ ước lượng. So với phương pháp ở [5], phương pháp này đơn giản hơn, đặc biệt có tác dụng trong những khoảng thời gian đầu của quá trình ước lượng trạng thái.

II - ĐẶT BÀI TOÁN VÀ CÁCH GIẢI

Cho một hệ tuyến tính được mô tả dưới dạng phương trình sau đây

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= F_1(t) x_1(t) + G_1(t) W(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (1)$$

với

$x_1(t)$ là vectơ trạng thái n chiều,

$F_1(t)$ - Ma trận liên tục có số chiều $n \times n$,

$W(t)$ - Quá trình ngẫu nhiên n chiều dạng tạp trắng chuẩn có kỳ vọng bằng 0 và ma trận hiệp phương sai

$$E[W(t) W^T(\tau)] = Q(t) \delta(t - \tau) \quad (1a)$$

ở đây $\delta(\cdot)$ là hàm delta Dirac.

Ngoài ra:

$$E[x_1(t_0)] = m_0 \quad (1b)$$

$$E[(x_1(t_0) - m_0)(x_1(t_0) - m_0)^T] = P_{10} \quad (1c)$$

$$E[x_1(t_0) W^T(t)] = 0 \quad (1d)$$

Giả sử biến trạng thái được ước lượng theo các quan sát rời rạc sau đây:

$$Z(t_k) = H_1(t_k) x_1(t_k) + V(t_k) \quad (2)$$

với

$Z(t_k)$ là vectơ quan sát rời rạc m chiều,

$H_1(t_k)$ - Ma trận quan sát cỡ $m \times n$ được xác định qua cấu trúc cụ thể của thiết bị quan sát và không phụ thuộc vào trạng thái $x_1(t)$.

Giả sử rằng nhiễu $V(t_k)$ là ngẫu nhiên, có phân phối chuẩn với kỳ vọng bằng 0 và phương sai như sau

$$E[V(t_k)V^T(t_j)] = R(t_k)\delta_{kj} \quad (2a)$$

với $R(t_k)$ là ma trận xác định dương, đặc trưng cho cường độ của nhiễu trắng chuẩn.

δ_{kj} - hàm Kroneker.

Đấu «T» biểu thị sự chuyển vị ma trận.

Ngoài ra chấp nhận rằng nhiễu $V(t_k)$ không phụ thuộc vào trạng thái ban đầu $x_1(t_0)$ và $W(t)$. Có nghĩa là

$$E[V(t_k)x_1^T(t_0)] = 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots \quad (2b)$$

$$E[V(t_k)W^T(t_k)] = 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots \quad (2c)$$

Thỏa mãn các điều kiện trên nhằm đảm bảo sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm ở phương trình (1) và cặp $(x_1(t), z(t_k))$ có phân bố hậu nghiệm Gauss [6].

Bộ lọc [5] có nhược điểm là không đảm bảo được độ chính xác của ước lượng lọc ở giai đoạn đầu của quá trình ước lượng. Ngoài ra việc giải phương trình ma trận trong định lý 3 ở [5] không phải bao giờ cũng đơn giản và vì thế có thể dẫn đến hậu quả xấu, làm phức tạp các tính toán bộ ước lượng. Để khắc phục nhược điểm này, phải sử dụng phương pháp ở [7] để nhận được ước lượng vectơ trạng thái cho hệ (1) tối ưu theo nghĩa bình phương cực tiểu:

a) $t_k \leq t < t_{k+1}$

$$\hat{x}_1(t) = F_1(t)x_1(t) \quad (3)$$

$$\hat{x}_1(t_k) = \bar{x}_{1k} \quad (3a)$$

$$P_1(t) = F_1(t)P_1(t) + P_1(t)F_1^T(t) + G_1(t)Q(t)G_1^T(t) \quad (4)$$

$$P_1(t_k) = P_{1k} \quad (4a)$$

b) $t = t_{k+1}$

$$\hat{x}_1(t_{k+1}) = \hat{x}_1(t_{k+1}/t_k) + K_1(t_{k+1}) [Z(t_{k+1}) - H_1(t_{k+1})\hat{x}_1(t_{k+1}/t_k)] \quad (5)$$

$$K_1(t_{k+1}) = P_1(t_{k+1}/t_k)H_1^T(t_{k+1}) [H_1(t_{k+1})P_1(t_{k+1}/t_k)H_1^T(t_{k+1}) + R(t_{k+1})]^{-1} \quad (6)$$

$$P_1(t_{k+1}) = P_1(t_{k+1}/t_k) - K_1(t_{k+1})H_1(t_{k+1})P_1(t_{k+1}/t_k) \quad (7)$$

Giả sử

$$x_1(t) = \alpha(t)x_2(t), \quad t \geq t_0 \quad (8)$$

$\alpha(t)$ là ma trận không suy biến $n \times n$.

Khi đó hệ (1), (2) tương đương với hệ sau:

$$\dot{x}_2(t) = F_2(t)x_2(t) + G_2(t)W(t) \quad (9)$$

$$Z(t_k) = H_2(t_k)x_2(t_k) + V(t_k) \quad (10)$$

Ở đây $x_2(t_0)$ cũng là biến trạng thái với kỳ vọng bằng

$$E[x_2(t_0)] = E[\alpha^{-1}(t_0)x_1(t_0)] = \alpha^{-1}(t_0)m_0 \quad (11)$$

và ma trận hiệp phương sai P_{20} có quan hệ với P_{10} như sau

$$P_{10} = \alpha(t_0)P_{20}\alpha^T(t_0) \quad (12)$$

Ngoài ra

$$F_2(t) = \alpha^{-1}(t)F_1(t)\alpha(t) - \alpha^{-1}(t)\dot{\alpha}(t), \quad t \geq 0 \quad (13)$$

$$G_2(t) = \alpha^{-1}(t)G_1(t), \quad t \geq 0 \quad (14)$$

$$H_2(t_k) = H_1(t_k)\alpha(t_k), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Nếu lại dùng phương pháp [7], sẽ nhận được ước lượng trạng thái hệ (9), (10) như sau :

a) $t_k < t < t_{k+1}$

$$\hat{x}_1(t) = F_1(t) \hat{x}_2(t) \quad (16)$$

$$\hat{x}_2(t_k) = \bar{x}_{2k} \quad (16a)$$

$$\dot{P}_2(t) = F_2(t) P_2(t) + P_2(t) F_2^T(t) + G_2(t) Q(t) G_2^T(t) \quad (17)$$

$$P_2(t_k) = P_{2k} \quad (17a)$$

b) $t = t_{k+1}$

$$\hat{x}_2(t_{k+1}) = \hat{x}_2(t_{k+1}/t_k) + K_2(t_{k+1}) [Z(t_{k+1}) - H_2(t_{k+1}) \hat{x}_2(t_{k+1}/t_k)] \quad (18)$$

$$K_2(t_{k+1}) = P_2(t_{k+1}/t_k) H_2^T(t_{k+1}) [H_2(t_{k+1}) P_2(t_{k+1}/t_k) H_2^T(t_{k+1}) + R(t_{k+1})]^{-1} \quad (19)$$

$$P_2(t_{k+1}) = P_2(t_{k+1}/t_k) - K_2(t_{k+1}) H_2(t_{k+1}) P_2(t_{k+1}/t_k) \quad (20)$$

Trên cơ sở các biểu thức (1), (2), (3), (4), (8), (9), (10), (18), (17) thu được quan hệ giữa các ước lượng như sau :

$$\hat{x}_1(t) = \alpha(t) \hat{x}_2(t), \quad t > t_0 \quad (21)$$

$$P_1(t) = \alpha(t) P_2(t) \alpha^T(t), \quad t > t_0 \quad (22)$$

$$\hat{x}_1(t_{k+1}/t_k) = \alpha(t_{k+1}) \hat{x}_2(t_{k+1}/t_k) \quad (23)$$

$$P_1(t_{k+1}/t_k) = \alpha(t_{k+1}) P_2(t_{k+1}/t_k) \alpha^T(t_{k+1}) \quad (24)$$

Nếu xét đến các biểu thức (5), (6), (7), (18), (19), (20), (23), (24) sẽ có

$$\hat{x}_1(t_{k+1}) = \alpha(t_{k+1}) \hat{x}_2(t_{k+1}) \quad (25)$$

$$P_1(t_{k+1}) = \alpha(t_{k+1}) P_2(t_{k+1}) \alpha^T(t_{k+1}) \quad (26)$$

Các biểu thức trên cho thấy có thể tính toán các ước lượng $\hat{x}_1(t)$, $\hat{x}_1(t_{k+1})$ và ma trận hiệp phương sai $P_1(t)$, $P_1(t_{k+1})$, $P_1(t_{k+1}/t_k)$ qua hệ (9), (10) và $\alpha(t)$. Như vậy vấn đề làm giảm khối lượng tính toán bộ ước lượng phụ thuộc vào cách chọn $\alpha(t)$, sự thể là $\alpha(t)$ cần được chọn sao cho thỏa mãn điều kiện triệt tiêu $F_2(t)$, có nghĩa là triệt tiêu biểu thức (13)

$$\alpha^{-1}(t) F_1(t) \alpha(t) - \alpha^{-1}(t) \alpha(t) = 0 \quad (27)$$

với điều kiện ban đầu

$$\alpha(t_0) = I_n \quad (27a)$$

Khi đó

$$\dot{P}_2(t) = G_2(t) Q(t) G_2^T(t) \quad (28)$$

$$P_2(t_0) = P_{20} \quad (28a)$$

Giải phương trình (27) đơn giản hơn rất nhiều phương trình của định lý 3 ở [5]. Sau đó có thể tính toán ma trận hiệp phương sai $P_1(t)$ theo (22), $P_1(t_{k+1})$ theo (26) rất đơn giản mà độ chính xác vẫn được đảm bảo.

III - THÍ DỤ

Lấy ví dụ ở [5] để so sánh các kết quả.

Xét hệ động lực, được cho trên đoạn [0, 11] bằng các phương trình sau đây :

$$\dot{x}^{(1)}(t) = -x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t) \quad (29)$$

$$\dot{x}^{(2)}(t) = -\frac{1}{8} x^{(2)}(t) \quad (30)$$

Kênh quan sát tương tự [5], nhưng được rời rạc hóa:

$$Z(t_k) = x^{(1)}(t_k) + 0,1 V(t_k) \quad (31)$$

$$E[x^{(1)}(t_0)] = E[x^{(2)}(t_0)] = 0 \quad (32)$$

$$E[V(t_k) V^T(t_j)] = I_m \delta_{kj}, m = 1 \quad (33)$$

$$E[V(t_k)] = 0 \quad (34)$$

Các phần tử của ma trận hiệp phương sai của vectơ

$(x^{(1)}(t_0), x^{(2)}(t_0))$ bằng P_{10}^{ij} , trong đó $i, j = 1, 2$

$$P_{10} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{vmatrix} \quad (35)$$

Giả sử các quan sát $Z(t_k)$ được tiến hành ở các điểm t_k , các điểm này chia khoảng $[0, 1]$ ra 10 phần bằng nhau với độ dài là 0,1.

Cần xác định độ chính xác của bộ lọc bằng phương pháp đề xuất trên và so sánh với phương pháp ở [5].

Để xác định các phần tử của $\alpha(t)$ bằng phương pháp [5], sử dụng biểu thức nhận được của định lý 3 trong [5]. Như vậy ma trận $\alpha(t)$ có dạng

$$\alpha(t) = \parallel 1, \varphi(t) \parallel$$

$\varphi(t)$ là nghiệm lớn nhất của phương trình

bậc 2 sau đây

$$P_{12}(t) \varphi^2(t) + (P_{11}(t) - P_{22}(t)) \varphi(t) - P_{12}(t) = 0 \quad (36)$$

Ở đây $P_{ij}(t)$, $(i, j = 1, 2)$ là các phần tử của ma trận hiệp phương sai của quá trình $x(t) = (x^{(1)}(t), x^{(2)}(t))$. Các kết quả tính toán được thể hiện bằng đường cong 1.

Bằng phương pháp đề xuất ở bài này, thu được $\alpha(t)$ dạng sau đây:

$$\alpha(t) = \begin{vmatrix} \left(\frac{8}{7} e^{-\frac{1}{8}t} + \frac{6}{7} e^{-t} - 1 \right) & \left(\frac{8}{7} e^{-\frac{1}{8}t} - \frac{8}{7} e^{-t} \right) \\ \left(e^{-\frac{1}{8}t} - 1 \right) & e^{-\frac{1}{8}t} \end{vmatrix} \quad (37)$$

$$\alpha(t_0) = I_2 \quad (38)$$

$$P_{10} = P_{20} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{vmatrix} \quad (39)$$

Ma trận hiệp phương sai $P_1(t)$ có dạng

$$P_1(t) = \begin{vmatrix} 2\alpha_{11}^2 + 1,5\alpha_{12}^2 & 2\alpha_{11}\alpha_{21} + 1,5\alpha_{12}\alpha_{22} \\ 2\alpha_{11}\alpha_{21} + 1,5\alpha_{12}\alpha_{22} & 2\alpha_{21}\alpha_{11} + 1,5\alpha_{22}^2 \end{vmatrix} \quad (40)$$

trong đó

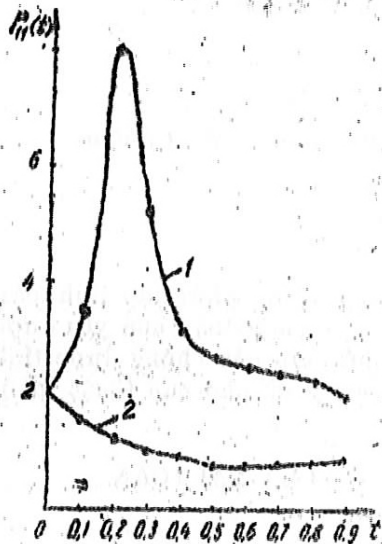
$$\alpha_{11} = \frac{8}{7} e^{-\frac{1}{8}t} + \frac{6}{7} e^{-t} - 1 \quad (41)$$

$$\alpha_{12} = \frac{8}{7} e^{-\frac{1}{8}t} - \frac{8}{7} e^{-t} \quad (42)$$

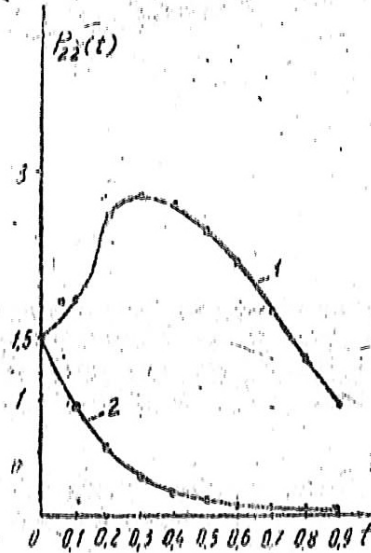
$$\alpha_{21} = e^{-\frac{1}{8}t} - 1 \quad (43) \quad \alpha_{22} = e^{-\frac{1}{8}t} \quad (44)$$

Các kết quả tính toán được thể hiện bằng đường cong 2. Từ các đồ thị thấy rõ ràng với số lượng quan sát nhỏ bộ lọc [5] không đảm bảo độ chính xác, như vậy kém hơn so với bộ lọc được tính toán bằng phương pháp chọn $\alpha(t)$ như trên. Ngoài ra thời gian tính toán của phương pháp [5] lại lớn hơn so với phương pháp ở bài này vì giải phương trình tìm $\alpha(t)$ của định lý 3 ở [5] phức tạp hơn so với phương trình (27).

Tuy nhiên ở thời điểm ban đầu $t_0 = 0$, độ chính xác của hai bộ lọc là như nhau. Nguyên nhân thứ nhất là do tính độc lập của các thành phần vectơ $x^{(1)}(t_0)$, $x^{(2)}(t_0)$ (ma trận hiệp phương sai có dạng đường chéo P_{10}). Nguyên nhân thứ hai là do chỉ quan sát được một thành phần $x^{(1)}(t)$ do đó khả năng ước lượng được $x^{(2)}(t)$ chỉ xuất hiện khi quan sát được động học thay đổi của thành phần $x^{(1)}(t)$.



Đồ thị mô tả phương sai của sai số ước lượng $P_{11}(t)$. Thành phần $x^{(1)}(t)$ của bộ lọc [5] bằng đường cong 1 và của bộ lọc được tính bằng phương pháp trên bởi đường cong 2.



Đồ thị mô tả phương sai sai số ước lượng $P_{22}(t)$ của $x^{(2)}(t)$. Đường cong 1 mô tả theo phương pháp [5], đường cong 2 theo phương pháp trên.

Nhận ngày 2-3-1985

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Meditch J.S., Suboptimal linear filtering for continuous dynamic processes, Report N° TOR-469 (5107-35)-2, Aerospace Corporation, EC Segundo, California 1964.
2. Schmidt S.F., Computational Techniques in Kalman filtering, in Theory and Application of Kalman filtering (C.T. Leondes, ed) AGARDograph 139, Report N°-AD 704306, 1970.
3. Stubberud A.R., Wismer D.A., Suboptimal Kalman filter Techniques in Theory and Application of Kalman filtering (C.T. Leondes, ed) AGARDograph 139, Report N°-AD 704306, 1970.
4. АОКИ М., Оптимизация стохастических систем—Наука—1971.
5. ОБЧАРЕНКО В.М., Синтез субоптимального фильтра заданного порядка. Автоматика и телемеханика N°5—стр 45—51; 1978.
6. ЛИПЦЕР Р.Ш., ШИРЯЕВА Н., Статистика случайных процессов. Наука 1974.
7. Vũ Ngọc Phên và Vũ Như Lan—Báo cáo tại hội thảo Điều khiển học kỹ thuật—Sầm Sơn, Thanh Hóa—1984.

РЕЗЮМЕ

Об одном подходе к упрощению вычисления ковариационной матрицы при оценивании непрерывных систем с дискретными наблюдениями.

В [7] предложен метод оценки состояния нелинейной непрерывной системы под дискретными наблюдениями. В настоящей статье, с помощью этого метода рассматривается один подход к упрощению вычисления ковариационной матрицы для оценки состояния системы, описываемой стохастическими линейными дифференциальными уравнениями при условии наблюдения, в дискретные моменты времени компонент вектора, где каждая компонента — линейная комбинация вектора состояния динамической системы.