Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T.21, S.3 (2005), 248–260

MỘT PHƯƠNG PHÁP NỘI SUY GIẢI BÀI TOÁN MÔ HÌNH MỜ TRÊN CƠ SỞ ĐẠI SỐ GIA TỬ

TRẦN THÁI SƠN[1], NGUYỄN THẾ DŨNG[2]

[1] *Viện Công nghệ thông tin*
[2] *Khoa Tin học, Trường ĐHSP Huế*

Abstract. In this paper, we deal with the constructing fuzzy measure function base on quantified semantic mapping ν in [1]. And then, we present a new interpolation method for solving fuzzy model problem with multiple variable, multiple conditional.

Tóm tắt. Trong bài báo này chúng tôi đề cập đến việc xây dựng hàm đo mờ dựa trên ánh xạ lượng hóa ngữ nghĩa ν đã được nêu trong [1]. Từ đó đưa ra một phương pháp nội suy mờ mới để giải bài toán mô hình mờ đa biến, đa điều kiện.

1. MỞ ĐẦU

Trong $[4, 6, 10, 12, 13]$ là các công trình về các lĩnh vực khác nhau của hệ chuyên gia mờ, hệ điều khiển mờ, xử lý ảnh, mạng nơron... đã cho thấy sự cần thiết của việc giải bài toán lập luận xấp xỉ có dạng tổng quát, ta thường gọi là lập luận mờ đa điều kiện. Xét mô hình mờ (M):

If $X_1 = A_{11}$ and $X_2 = A_{12}$ and ... and $X_n = A_{1n}$ Then $Y = B_1$
If $X_1 = A_{21}$ and $X_2 = A_{22}$ and ... and $X_n = A_{2n}$ Then $Y = B_2$
...
If $X_1 = A_{m1}$ and $X_2 = A_{m2}$ and ... and $X_n = A_{mn}$ Then $Y = B_m$
Cho $X_1 = A_{01}$ and $X_2 = A_{02}$ and ... and $X_n = A_{0n}$ cần tính $Y = B_0$?

Ở đây, X_i, Y là các biến ngôn ngữ, A_{ij}, B_j là các giá trị ngôn ngữ (là các tập mờ). Lúc đó có thể xem việc giải một mô hình mờ nói trên chính là việc giải bài toán suy luận ngôn ngữ.

Trong [2] đã đưa ra khái niệm hàm đo và hàm đo mờ, với khái niệm hàm đo, tác giả đã giải bài toán suy luận ngôn ngữ thông qua hàm đo.

Trong [1] các tác giả cũng đã xây dựng các khái niệm như bán kính mờ, ánh xạ lượng hóa ngữ nghĩa... cho các biến ngôn ngữ trên cấu trúc đại số gia tử.

Ở đây chúng ta sẽ chỉ ra rằng ánh xạ lượng hóa ngữ nghĩa ν thỏa mãn các tính chất của hàm đo được nêu trong [3] và từ đó xây dựng nên khái niệm hàm đo mờ dựa trên ánh xạ lượng hóa ngữ nghĩa. Với khái niệm hàm đo mờ và sự tương đương giữa cấu trúc đại số gia tử mở rộng đối xứng với một lớp tập mờ, vận dụng các phương pháp nội suy mờ do D.Tikk và một số tác giả phát triển trong thời gian gần đây ($[7, 8]$), chúng tôi sẽ phát triển một phương pháp nội suy mới để giải bài toán mô hình mờ đa biến, đa điều kiện.

Mục 2 bài báo tóm tắt các kết quả về hàm đo mờ dựa trên ánh xạ lượng hóa ngữ nghĩa. Mục 3 trình bày một phương pháp nội suy mờ mới để giải bài toán mô hình mờ đa biến, đa điều kiện. Trong mục này sẽ đưa ra một thuật toán để giải bài toán nêu trên cùng kết quả thử nghiệm trên một ví dụ kinh điển về bài toán mô hình mờ của Mizumoto [9]. Kết quả cho thấy chấp nhận được và có nhiều ưu điểm so với các phương pháp khác. Một số nhận xét được đưa ra trong mục kết luận.

2. HÀM ĐO MỜ DỰA TRÊN KHÁI NIỆM ÁNH XẠ LƯỢNG HÓA NGỮ NGHĨA

Trong phần này, chúng tôi sẽ chỉ ra rằng ánh xạ lượng hóa ngữ nghĩa ν được xây dựng trong [1] là một hàm đo trên đại số gia tử. Từ đó có thể xác định một metric trên đại số gia tử. Một số tính chất thể hiện mối liên hệ giữa ν và độ đo tính mờ của các phần tử trên đại số gia tử cũng được làm rõ. Chúng tôi sẽ tóm lược lại các kết quả trên sau khi nhắc lại một số kiến thức cơ sở về đại số gia tử và đại số gia tử đối xứng, khái niệm ánh xạ lượng hóa ngữ nghĩa...Các kết quả này có thể xem thêm trong $[1, 2]$.

Trong tự nhiên, chúng ta thường có các biến ngôn ngữ mà các giá trị của nó là các giá trị ngôn ngữ với ngữ nghĩa biểu thị bằng các tập mờ. Ví dụ, biến ngôn ngữ "sức khỏe" có các giá trị có thể là *khỏe, rất khỏe, yếu, tương đối yếu*... Trong đại số gia tử, tập các giá trị biến ngôn ngữ được xem như một đại số hình thức với các phép toán một ngôi (là các gia tử hay còn gọi từ nhấn) tác động lên các khái niệm nguyên thủy (hay còn gọi là các từ sinh). Trong ví dụ trên, *khỏe, yếu* là các từ sinh còn *rất, tương đối*... là các từ nhấn, ngoài ra ngữ nghĩa của các gia tử còn có thể biểu diễn qua quan hệ thứ tự bộ phận, chẳng hạn *yếu* $\leqslant$ *tương đối yếu* $\leqslant$ *khỏe* $\leqslant$ *rất khỏe.* Như vậy đại số gia tử (ĐSGT) sẽ được biểu diễn bởi bộ ba $X = (X, H, \leqslant)$, trong đó, X là tập được sắp thứ tự bộ phận bởi $\leqslant, H$ là tập các phép toán một ngôi hay tập các gia tử.

Nếu ký hiệu $H(x)$ là tập tất cả các phần tử sinh ra do áp dụng các phép toán trong H lên $x \in X$ và cộng thêm các phần tử "giới hạn" $\inf x$ và $\sup x$ tương ứng với giá trị cận trên và cận dưới của $H(x)$ ta sẽ có khái niệm ĐSGT mở rộng. ĐSGT mở rộng là bộ bốn $AX = (X, G, H_c, \leqslant)$, trong đó $H_c = H \cup \{\sup, \inf\}, G$ là tập các phần tử sinh. ĐSGT mở rộng mà tập các phần tử sinh chứa đúng hai phần tử sinh dương và âm đối xứng nhau (như *trẻ* và *già, khỏe* và *yếu, xa* và *gần*) được gọi là ĐSGT mở rộng đối xứng.

Khái niệm hàm đo

Định nghĩa 2.1. ([3]) Cho đại số gia tử mở rộng đối xứng $(X, C, H_c, \leqslant)$. $\lambda : X \to [0, 1]$ là một hàm đo trên X nếu thỏa mãn:

(1) $\forall x : \lambda(x) \in [0, 1], \lambda(\sup c^+) = 1, \lambda(\inf c^-) = 0$, trong đó $c^+, c^- \in C$ là các phần tử sinh dương và âm.

(2) $\forall x, y \in X$, nếu $x < y$ thì $\lambda(x) < \lambda(y)$ (tính đồng biến).

Định nghĩa 2.2. ([3]) (hàm ngược của hàm đo) Cho đại số gia tử mở rộng đối xứng

$(X, C, H_c, \leqslant)$. λ là một hàm đo trên X, $\lambda^{-1} : [0,1] \to X$ là hàm ngược của hàm đo λ nếu thỏa mãn: $\forall a \in [0,1], \lambda^{-1}(a) \in X$ sao cho $|\lambda(\lambda^{-1}(a)) - a| \leqslant |\lambda(x) - a|, \forall x \in X$.

Định nghĩa 2.3. ([3] hàm đo mờ) Cho đại số gia tử mở rộng đối xứng $(X, C, H, \leqslant), F[0,1]$ là tập tất cả các tập mờ trên $[0,1], K : F[0,1] \to [0,1]$ là một hàm khử mờ. Gọi $\Lambda : X \to F[0,1]$ là một hàm đo mờ trên X với hàm khử mờ K, nếu thỏa mãn $K\Lambda$ là một hàm đo trên X.

Khái niệm hàm độ đo tính mờ

Cho đại số gia tử $AX = (X, G, H, \leqslant)$, với X là tập nền, $G = \{1, c^+, w, c^-, 0\}$. Trong đó $1 > x > w > y > 0$ với mọi $x, y \in X$ và $h1 = 1, h0 = 0, hw = w$, với mọi $h \in H, w$ là phần tử trung hòa, còn c^+ và c^- là các phần tử sinh dương và sinh âm. $H = H^+ \cup H^-$ với $H^- = \{h_1, h_2, ..., h_p\}$ và $H^+ = \{h_{p+1}, ..., h_{p+q}\}, h_1 > h_2 > ... > h_p$ và $h_{p+1} < ... < h_{p+q}$.

Định nghĩa 2.4. ([2]) Hàm $fm : X \to [0,1]$ được gọi là độ đo tính mờ trên X nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $fm(c^-) = w > 0$ và $fm(c^+) = 1 - w > 0$.

(ii) Với $c \in \{c^-, c^+\}$ thì $\displaystyle\sum_{i=1}^{p+q} fm(h_i c) = fm(c)$.

(iii) Với mọi $x, y \in X, \forall h \in H, \dfrac{fm(hx)}{fm(x)} = \dfrac{fm(hy)}{fm(y)} = \dfrac{fm(hc)}{fm(c)}$, với $c \in \{c^-, c^+\}$, nghĩa là tỷ số này không phụ thuộc vào x và y, và ký hiệu là $\mu(h)$ gọi là độ đo tính mờ của gia tử h.

Một số tính chất của độ đo tính mờ *fm*

(i)
$$fm(hx) = \mu(h) fm(x), \ \forall x \in X.$$

(ii)
$$\sum_{i=1}^{p+q} fm(h_i c) = fm(c), \ c \in \{c^-, c^+\}.$$

(iii)
$$\sum_{i=1}^{p+q} fm(h_i x) = fm(x), \ \forall x \in X.$$

(iv)
$$\sum_{i=1}^{p} \mu(h_i) = \alpha \text{ và } \sum_{i=p+1}^{p+q} \mu(h_i) = \beta, \ \text{ với } \alpha, \beta > 0 \ \text{ và } \ \alpha + \beta = 1.$$

Với mọi $x \in X$, ta gọi $\dfrac{fm(x)}{2}$ là bán kính mờ của x.

Ánh xạ lượng hóa ngữ nghĩa của biến ngôn ngữ

Cho đại số gia tử $AX = (X, C, H, \leqslant)$,

Định nghĩa 2.5. ([2] hàm sign) Hàm sign : $X \to \{-1, 0, 1\}$ là một ánh xạ được định nghĩa một cách đệ quy như sau, với mọi $h, h' \in H$:

a) $\mathrm{sign}(c^-) = -1$ và $\mathrm{sign}(hc^-) = +\mathrm{sign}(c^-)$ nếu $hc^- < c^-$.
$\mathrm{sign}(hc^-) = -\mathrm{sign}(c^-)$ nếu $hc^- > c^-$.

$\text{sign}(c^+) = +1$ và $\text{sign}(hc^+) = +\text{sign}(c^+)$ nếu $hc^+ > c^+$.
$\text{sign}(hc^+) = -\text{sign}(c^+)$ nếu $hc^+ < c^+$.
b) $\text{sign}(h'hx) = -\text{sign}(hx)$ nếu h' là negative đối với h và $h'hx \neq hx$.
c) $\text{sign}(h'hx) = +\text{sign}(hx)$ nếu h' là positive đối với h và $h'hx \neq hx$.
d) $\text{sign}(h'hx) = 0$ nếu $h'hx = hx$.

Khái niệm h' là negative hay positive đối với h xem thêm trong [1, 2].

Ta thấy với mọi $h \in H, \forall x \in X$, ta có: nếu $\text{sign}(hx) = 1$ thì $hx > x$ và nếu $\text{sign}(hx) = -1$ thì $hx < x$.

Định nghĩa 2.6. ([2] Ánh xạ lượng hóa ngữ nghĩa ν) Cho fm là hàm đo tính mờ trên X, với các tham số như đã cho trong định nghĩa hàm fm. Ánh xạ lượng hóa ngữ nghĩa ν trên X được định nghĩa như sau:

1) $\nu(W) = w; \nu(c^-) = \beta.w$ và $\nu(c^+) = \beta.w + \alpha$,

2)

$$\nu(h_jx) = \nu(x) + \text{sign}(h_jx) \times \left[\sum_{i=j}^{p} fm(h_ix) - \frac{1}{2}(1 - \text{sign}(h_jx)\text{sign}(h_{p+q}h_jx)(\beta - \alpha))fm(h_jx) \right]$$

với $1 \leqslant j \leqslant p$ và

$$\nu(h_jx) = \nu(x) + \text{sign}(h_jx) \times \left[\sum_{i=p+1}^{p} fm(h_ix) - \frac{1}{2}(1 - \text{sign}(h_jx)\text{sign}(h_{p+q}h_jx)(\beta - \alpha))fm(h_jx) \right]$$

với $j > p$.

Trong trường hợp $\beta = \alpha = 1/2$ ta có hàm lượng hóa ngữ nghĩa ν trên X là:

1) $\nu(c^-) = (1/2)w$ và $\nu(c^+) = (1/2)w + 1/2$.

2)
$$\nu(h_jx) = \nu(x) + \text{sign}(h_jx) \times \left[\sum_{i=1}^{p} fm(h_ix) - \frac{1}{2} fm(h_jx) \right] \quad \text{với } 1 \leqslant j \leqslant p,$$

$$\nu(h_jx) = \nu(x) + \text{sign}(h_jx) \times \left[\sum_{i=p+1}^{p} fm(h_ix) - \frac{1}{2} fm(h_jx) \right] \quad \text{với } j > p.$$

Mệnh đề 2.7. *Ánh xạ lượng hóa ngữ nghĩa ν được nêu trong* [1, 2] *thỏa mãn các tính chất cơ bản của hàm đo là:*

1) $0 \leqslant \nu(x) \leqslant 1, \forall x \in X$.

2) *$\forall x, y \in X$ nếu $x < y$ thì $\nu(x) < \nu(y)$ (tính đồng biến). Hơn nữa khi $\alpha = \beta = 1/2$ ta có:*

3)
$$\left| \frac{\nu(hx) - \nu(x)}{\nu(kx) - \nu(x)} \right| = \left| \frac{\nu(hy) - \nu(y)}{\nu(ky) - \nu(y)} \right|.$$

Chứng minh. Các tính chất 1) và 2) dễ dàng suy được từ định nghĩa. Để chứng minh tính chất 3), ta chứng minh khi $\alpha = \beta = 1/2$ thì $\left| \dfrac{\nu(hx) - \nu(x)}{\nu(kx) - \nu(x)} \right| = \dfrac{fm(x)}{fm(y)}$ tức tỷ lệ này không phụ thuộc vào giá trị cụ thể của gia tử h. Thật vậy, khi $\alpha = \beta = 1/2$ thì theo Định nghĩa 2.6 tồn tại $j \in \{1, ..., p+q\}$ sao cho $h = h_j$ và

$$\nu(hx) = \nu(h_j x) = \nu(x) + \mathrm{sign}(h_j x) \times \left[\sum_{i=j}^{p} fm(h_i x) - \frac{1}{2} fm(h_j x)\right] \quad \text{với } 1 \leqslant j \leqslant p,$$

$$\nu(hx) = \nu(h_j x) = \nu(x) + \mathrm{sign}(h_j x) \times \left[\sum_{i=p+1}^{j} fm(h_i x) - \frac{1}{2} fm(h_j x)\right] \quad \text{với } j > p.$$

Khi đó

$$|\nu(hx) - \nu(x)| = \left[\sum_{i=j}^{p} fm(h_i x) - \frac{1}{2} fm(h_j x)\right] \quad \text{với } 1 \leqslant j \leqslant p,$$

và

$$|\nu(hx) - \nu(x)| = \left[\sum_{i=p+1}^{j} fm(h_i x) - \frac{1}{2} fm(h_j x)\right] \quad \text{với } j > p.$$

Để ý rằng, theo tính chất (i) của độ đo mờ $fm(h_i x) = \mu(h_i x) fm(x), \forall x \in X$, nên ta có $\dfrac{fm(h_i x)}{fm(x)} = \dfrac{fm(h_i y)}{fm(y)} = \mu(h_i)$, do đó $fm(h_i x) = \dfrac{fm(x)}{fm(y)} fm(h_i y)$. Thay $fm(h_i x)$ bằng $\dfrac{fm(x)}{fm(y)} fm(h_i y)$ vào các đẳng thức trên, ta có $|\nu(hx) - \nu(x)| = \dfrac{fm(x)}{fm(y)} |\nu(hy) - \nu(y)|$, từ đó suy ra điều phải chứng minh. ■

Như vậy, có thể nói rằng ánh xạ lượng hóa ngữ nghĩa ν là một hàm đo trên đại số gia tử, và $\rho(x, y) = |\nu(x) - v(y)|$ là một metric trên đại số gia tử X. Hơn nữa, $\dfrac{\rho(hx, x)}{\rho(kx, x)} = \dfrac{\rho(hy, y)}{\rho(ky, y)}$ với mọi $h, k \in H$ và $\forall x, y \in X$. Điều này chỉ ra rằng mức độ tác động tương đối giữa các gia tử h và k không phụ thuộc vào các từ x hay y mà nó tác động.

Với ánh xạ lượng hóa ngữ nghĩa, ánh xạ ngược ν^{-1} của ν thỏa mãn các tính chất của hàm ngược của hàm đo. Để xây dựng ν^{-1}, ta đi xây dựng một số khái niệm và xem xét Mệnh đề 2.8 dưới đây.

Với một đoạn thẳng I, ta gọi một họ các đoạn thẳng I_k $(k = 1, ..., m)$ là một tựa phân hoạch của I nếu I_k thỏa các điều kiện sau:

- Với hai đoạn bất kỳ thuộc I_k, chỉ có tối đa một điểm chung.
- $\bigcup_{k=1}^{m} I_k = I$.

Trên họ I_k nói trên, có thể xác định một quan hệ thứ tự trên nó như sau: $I_i > I_j$ nếu $\forall t \in I_i$ và $\forall s \in I_j$ ta có $t \geqslant s$.

Mệnh đề 2.8. *Cho ĐSGT $(X, G, H, \leqslant)$, $\forall a \in [0, 1]$ và $\forall \epsilon > 0$ cho trước, luôn xác định được một giá trị ngôn ngữ $x \in X$ có giá trị lượng hóa ngữ nghĩa sai khác a không quá một sai số ϵ :*

$$\forall a \in [0,1], \forall \epsilon > 0, \exists x \in X : |\nu(x) - a| < \epsilon.$$

Chứng minh. Ta chứng minh mệnh đề dựa trên cách xác định các giá trị của ánh xạ lượng hóa ngữ nghĩa ν ([1]).

Với mỗi $x \in X$, ký hiệu $dp(x)$ là độ sâu của x, tức số lần xuất hiện các ký hiệu kể cả gia tử lẫn phần tử sinh trong x.

Với $dp(x) = 1$, tức $x \in \{c^-, c^+\}$, theo định nghĩa của $\nu(x)$, ta chia đoạn [0,1] thành hai đoạn theo thứ tự từ trái sang phải là $I(c^-)$ và $I(c^+)$, độ dài của $I(c^-)$ được ký hiệu là $|I(c^-)| = fm(c^-)$, tương tự độ dài của $I(c^+)$ là $|I(c^+)| = fm(c^+)$. Theo định nghĩa của ν thì $\nu(c^-)$ là điểm chia đoạn $I(c^-)$ thành hai đoạn con theo tỷ lệ $\beta : \alpha$ và $\nu(c^+)$ là điểm chia đoạn $I(c^+)$ thành hai đoạn con theo tỷ lệ $\alpha : \beta$, ký hiệu c^u để chỉ $I(c^-)$ hay $I(c^+)$.

+ Nếu $|\nu(c^u) - a| < \epsilon$, mệnh đề được chứng minh với $x = c^u$.

Ngược lại, khi đó a sẽ thuộc về một trong hai đoạn $I(c^-)$ và $I(c^+)$.

+ Nếu $a \in I(c^-)$, ta sẽ phân hoạch đoạn $I(c^-)$ thành $p+q$ đoạn con $I(h_i c^-), i = 1, ..., p+q$ với độ dài $|I(h_i c^-)| = fm(h_i c^-)$ và $I(h_i c^-) > I(h_j c^-)$ với $1 \leqslant i < j \leqslant p+q$. $\nu(c^-)$ chính là điểm chung giữa hai đoạn $I(h_p c^-)$ và $I(h_{p+1} c^-)$. Còn $\nu(h_i c^-)$ là điểm chia trong đoạn $I(h_i c^-)$ theo tỷ lệ $\beta : \alpha$ nếu sign $(h_{p+q} h_i c^-) = -1$ và ngược lại theo tỷ lệ $\alpha : \beta$ nếu sign$(h_{p+q} h_i c^-) = 1$. Lúc này, a sẽ thuộc một trong các đoạn $I(h_i c^-), i = 1, ..., p+q$.

Nếu $|\nu(h_i c^-) - a| < \epsilon$, mệnh đề được chứng minh với $x = h_i c^-$.

+ Nếu $a \in I(c^+)$ quá trình lập luận tương tự.

Bây giờ nếu $|\nu(h_i c^u) - a| > \epsilon$, $\forall i = 1, ..., p+q$, khi đó ký hiệu $x^{(k)}$ là lớp các từ có độ sâu $dp(x) = k$. Như vậy, các từ có dạng $h_i c^u$ thuộc về lớp các từ $x^{(2)}$.

Có thể lập luận một cách tổng quát bằng quy nạp theo k như sau: Giả sử a thuộc về một đoạn $I(x^{(k-1)})$ nào đó, ta tiếp tục phân hoạch đoạn $I(x^{(k-1)})$ thành $p+q$ đoạn con sao cho $I(h_i x^{(k-1)}) > I(h_j x^{(k-1)})$ nếu sign$(h_{p+q} x^{(k-1)}) = -1$ và ngược lại $I(h_j x^{(k-1)}) > I(h_i x^{(k-1)})$ nếu sign$(h_{p+q} x^{(k-1)}) = 1$ với $1 \leqslant i < j \leqslant p+q$. Hơn nữa, độ dài của $I(h_i x^{(k-1)}) = fm(h_i x^{(k-1)})$. Bên cạnh đó $\nu(x^{(k-1)})$ là điểm chung của hai đoạn $I(h_p x^{(k-1)})$ và $I(h_{p+1} x^{(k-1)})$, còn $\nu(h_i x^{(k-1)})$ là điểm chia đoạn $I(h_i x^{(k-1)})$ theo tỷ lệ $\beta : \alpha$ nếu sign$(h_{p+q} h_i x^{(k-1)} = -1$. và theo tỷ lệ $\alpha : \beta$ nếu sign$(h_{p+q} h_i x^{(k-1)} = 1$. Lúc này a sẽ thuộc vào một đoạn $I(x^k)$ nào đó, với x^k có dạng $h_i x^{(k-1)}$, $i = 1, ..., p+q$.

Nếu $|\nu(h_i x^{(k-1)}) - a| < \epsilon$, mệnh đề được chứng minh với $x = x^k = h_i x^{(k-1)}$ với mọi $i \in \{1, ..., p+q\}$. Nếu ngược lại, ta tiếp tục quá trình phân hoạch đoạn $I(x^k)$ tương tự trên cho đến khi $|\nu(x^k) - a| < \epsilon$, khi đó mệnh đề được chứng minh với $x = x^k$.

Lưu ý rằng việc phân hoạch trên bao giờ cũng thực hiện được theo các tính chất của độ đo tính mờ fm và theo định nghĩa của ánh xạ ν. ■

3. MỘT PHƯƠNG PHÁP NỘI SUY GIẢI BÀI TOÁN MÔ HÌNH MỜ DỰA TRÊN CƠ SỞ ĐẠI SỐ GIA TỬ

Tiếp theo, mục này, chúng tôi sẽ đề xuất một phương pháp nội suy mới dựa trên phương pháp nội suy mờ đối với tập mờ dạng CNFS (convex normal fuzzy set) của D. Tikk, T.D.Gedeon, P.Branyi [7, 8]. Phương pháp của các tác giả này tiếp tục phát triển phương pháp nội suy của Koczy và Hirota (phương pháp KH) [6] và phương pháp MACI (phương pháp Modify Alpha - Cut Interpolation). Phương pháp này tạm gọi là phương pháp IMUL[7, 8] (Improved MULtidimentional). Phương pháp này khắc phục được các trường hợp bất thường của tập mờ kết luận thu được (không còn là CNFS) của bài toán suy diễn sau khi nội suy theo phương pháp KH.

Phương pháp nội suy của chúng ta dựa trên metric trên đại số gia tử đã được xây dựng trong mục trên. Phương pháp đề ra ở đây bỏ qua được bước tích hợp các đại số gia tử khác nhau, đồng thời tính toán được bán kính mờ của kết luận. Kết hợp với ánh xạ ngược ν^{-1} của ánh xạ lượng hóa ngữ nghĩa ν, ta có thể rút ra được giá trị ngôn ngữ tương ứng của kết luận.

Từ các tính chất của độ đo tính mờ, ta thấy rằng khi có các tham số $fm(c^+)$, $fm(c^-)$ và các $\mu(h)$ để xây dựng ν, với định nghĩa đệ quy của $fm(x)$ từ $fm(c^+)$, $fm(c^-)$ và các $\mu(h)$, ta có thể tính được các $fm(hc^+)$ và các $fm(hc^-)$ và từ đó tính được $fm(x)$ với mọi $x \in X$.

Với mọi $x \in X$, nếu $\text{sign}(h_{p+q}x) = -1$, đặt $a = \nu(x) - \beta fm(x)$ và $b = \nu(x) + \alpha fm(x)$. Ngược lại, nếu $\text{sign}(h_{p+q}x) = 1$, đặt $a = \nu(x) - \alpha fm(x)$ và $b = \nu(x) + \beta fm(x)$. Khi đó, với mọi $x \in X$, tập mờ tam giác $(a, \nu(x), b)$ là hoàn toàn xác định. Xét $K : F[0, 1] \to [0, 1]$ là hàm khử mờ theo phương pháp cực đại, với tập mờ tam giác $A = (a, \nu(x), b)$ thì $K(A) = \nu(x)$. Do đó hàm đo mờ $\Lambda(x) = (a, \nu(x), b)$ trong Mệnh đề 3.1 sau là xác định.

Mệnh đề 3.1. *Cho đại số gia tử mở rộng đối xứng* $(X, C, H, \leqslant), \nu$ *là ánh xạ lượng hóa ngữ nghĩa trên* $X, F[0, 1]$ *là tập tất cả các tập mờ trên* $[0, 1], K : F[0, 1] \to [0, 1]$ *là hàm khử mờ theo phương pháp cực đại.*

Ta có $\Lambda : X \to F[0, 1]$ *với* $\Lambda(x) = (a, \nu(x), b)$ *là một hàm đo mờ trên* X.

Tiếp theo như đã nói trong phần đầu mục này, dựa vào phương pháp nội suy mờ của D. Tikk, T.D.Gedeon, P.Branyi [7, 8], dưới đây chúng ta sẽ đề xuất một thuật toán nội suy mới để giải bài toán lập luận mờ dựa trên cơ sở đại số gia tử. Bằng thuật toán này với đầu vào $X^0 = (A_{01}, A_{02}, ..., A_{0n})$, chúng ta sẽ tính toán được một tập mờ tam giác $(a_0, \nu(B_0), b_0)$ ứng với kết luận $Y = B_0$, ở đây $\nu(B_0)$ là giá trị lượng hóa của biến ngôn ngữ ứng với kết luận B_0 và $|b_0 - a_0|$ là độ dài bán kính mờ của nó.

Tư tưởng chính của thuật toán như sau:

Với mỗi luật thứ t $(t = 1, ..., m)$ trong mô hình mờ là:

If $X_1 = A_{t1}$, and $X_2 = A_{t2}$... and $X_n = A_{tn}$ then $Y = B_t$.

Đặt $X^t = (A_{t1}, A_{t2}, ..., A_{tn})$, ta tính khoảng cách từ đầu vào $X^0 = (A_{01}, A_{02}, ..., A_{0n})$ đến các X^t để xác định các X^j, X^k gần với X^0 nhất. Khoảng cách $\rho(X^0, X^t)$ có thể được tính theo các phương pháp sau:

$$\rho(X^0, X^t) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\nu(A_{ti}) - \nu(A_{0i})|^2} \text{ (khoảng cách Euclide),} \tag{1}$$

$$\rho(X^0, X^t) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\nu(A_{ti}) - \nu(A_{0i})|^w} \text{ (khoảng cách Minkowski),}$$

$\rho(X^0, X^t) = \sum_{i=1}^{n} |\nu(A_{ti}) - \nu(A_{0i})|$ (khoảng cách Hamming).

Đặt $F(X^t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \nu(A_{ti})$ với $t = 0, 1, 2, ...$

Nếu $F(X^0) \in [F(X^j), F(X^k)]$ hoặc $F(X^0) \in [F(X^k), F(X^j)]$ ta sẽ nội suy tuyến tính dựa trên X^j, X^k và phương trình $\rho(X^0, X^j) : \rho(X^0, X^k) = \rho(B_0, B_j) : \rho(B_0, B_k)$.

Ta có:

$$\nu(B_0) = (1 - t).\nu(B_j) + t.\nu(B_k). \tag{2}$$

Với

$$t = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\nu(A_{0i}) - \nu(A_{ji}))^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\nu(A_{ki}) - \nu(A_{ji}))^2}}$$

Còn a_0 và b_0 được tính như sau:

$$a_0 = (1 - t_a)a_j + t_a a_k. \tag{3}$$

$$b_0 = (1 - t_b)b_j + t_b b_k. \tag{4}$$

Với a_j, b_j, a_k, b_k tương ứng là các đầu bán kính mờ của B_j, B_k.

$$t_a = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} ((a_{0i}) - (a_{ji}))^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} ((a_{ki}) - (a_{ji}))^2}}, \quad \text{và} \quad t_b = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} ((b_{0i}) - (b_{ji}))^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} ((b_{ki}) - (b_{ji}))^2}},$$

với $a_{0i}, b_{0j}, a_{ji}, b_{ji}, a_{ki}, b_{ki}$ tương ứng là các đầu mút bán kính mờ của A_{0i}, A_{ji}, A_{ki}.

Ngược lại, $F(X^0) \notin [F(X^j), F(X^k)]$ hoặc $F(X^0) \notin [F(X^k), F(X^j)]$ có thể ngoại suy để tính giá trị $\nu(B_0)$, tuy vậy sẽ cho sai số lớn. Ta có thể tính $\nu(B_0)$ theo cách sau:

\+ Tìm chỉ số l sao cho $\rho(X^0, X^l) = \min(\rho(X^0, X^t))$; $t = 1, ..., m; l \notin j; l \notin k$.

\+ $\nu(B_0) = \big((\nu(B_j) + \nu(B_k) + \nu(B_l)\big)/3$.

Thuật toán 3.2.

Input: Cho mô hình mờ (M), đầu vào $X^0 = (A_{01}, A_{02}, ..., A_{0n})$.

Output: Giá trị $Y = B_0$.

Phương pháp:

Bước 1:

- Tính các giá trị $\nu(A_{ti}), \nu(B_t); i = 1, ..., n, t = 1, ..., m$ đối với mỗi mệnh đề IF - THEN.
- Tính các giá trị $\nu(A_{0i}), i = 1, ..., n$.
- Tính các bán kính mờ $a_{0i}, b_{0i}, i = 1, ..., n$.

Bước 2:

- Tính các khoảng cách $\rho(X^0, X^i)$ theo công thức (1).

Bước 3:

- Xác định j, k sao cho $\rho(X^0, X^j), \rho(X^0, X^k) = \min \rho(X^0, X^t), t = 1, ..., m, k \neq j$.
- Tính các bán kính mờ $a_{ji}, b_{ji}, a_{ki}, b_{ki}$.

Nếu $F(X^0) \in [F(X^j), F(X^k)]$ hoặc $F(X^0) \in [F(X^k), F(X^j)]$ nội suy theo các công thức (2), (3), (4) để tính giá trị B_0.

Ngược lại $F(X^0) \notin [F(X^j), F(X^k)]$ hoặc $F(X^0) \notin [F(X^k), F(X^j)]$ thì

+ Tìm chỉ số l sao cho $\rho(X^0, X^l) = \min(\rho(X^0, X^t))$; $t = 1, ..., m; l \notin j; l \notin k$.

+ $\nu(B_0) = \big((\nu(B_j) + \nu(B_k) + \nu(B_l)\big)/3$.

Bước 4:

- Từ giá trị $\nu(B_0)$, áp dụng hàm ngược ν^{-1} để tính ra giá trị ngôn ngữ của B_0.

Return.

Sau khi trang bị metric trên đại số gia tử ta có thể sử dụng các phép nội suy bậc n hay nội suy trên lưới như nội suy Newton hay Lagrange... Tuy vậy, các phép nội suy này có độ phức tạp tính toán cao. Ở đây chúng ta áp dụng nội suy bậc nhất với sai số có thể chấp nhận được. Vấn đề được kiểm chứng qua ví dụ dưới đây.

Xét ví dụ trong [9] về điều khiển mờ cho một plant model với các luật điều khiển của nó được cấu trúc thành một mô hình mờ bao gồm các luật dạng $e, \Delta e \Rightarrow \Delta q$ theo bảng sau:

$e\backslash\Delta e$	NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
NB				PB			
NM				PM			
NS				PS			
ZO	PB	PM	PS	ZO	NS	NM	NB
PS				NS			
PM				NM			
PB				NB			

Các luật trên có dạng sau:

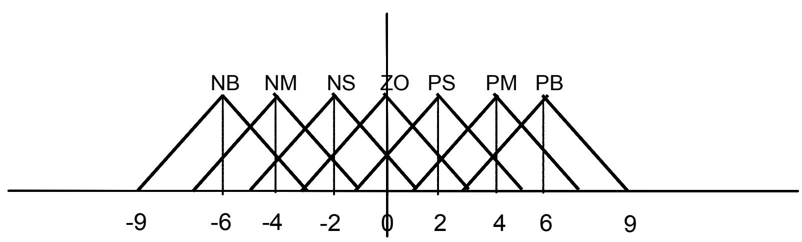
R1: If e is NB and Δe is ZO then Δq is PB

R2: If e is NM and Δe is ZO then Δq is PM

...

R13: If e is ZO and Δe is PB then Δq is PB

Trong đó e: lỗi (error), Δe: sự thay đổi của lỗi (change in error), và Δq: sự thay đổi của hành động điều khiển (change in control action), còn NB, NM, ..., PB là các giá trị ngôn ngữ (negative big, negative medium, negative small, zero, positive small, positive medium, positive big) được biểu diễn bởi các tập mờ mà hàm thuộc của nó cho trong hình sau:



Trong [4] đã tính toán cho mô hình trên theo phương pháp suy diễn mờ và nội suy mờ với các kết quả cho trong các bảng 1 và 2.

Bảng 1. Kết quả suy diễn mờ theo [4] và khử mờ theo phương pháp trọng tâm
(vì các luật có tính đối xứng, nên chỉ cần tính một phần tư của bảng)

$e\backslash\Delta e$	NB	NM	NS	ZO
NB	Unknown			
NM	4.0	3.0		
NS	4.358	2.701	2.0	
ZO	4.467	2.045	1.040	0
PS	4.358	1.169	0	
PM	4.0	0		
PB	Unknown			

Bảng 2 là kết quả tính toán đối với mô hình mờ nói trên theo phương pháp nội suy mờ trong [4]:

Bảng 2. Kết quả suy diễn sử dụng phương pháp nội suy mờ [4]

$e\backslash\Delta e$	NB	NM	NS	ZO
NB	5.964			
NM	5.382	4.0		
NS	5.874	3.897	2.0	
ZO	5.958	4.0	2.0	0
PS	5.785	3.692	0	
PM	3.015	0		
PB	0			

Bây giờ, ta áp dụng phương pháp nội suy đưa ra trong bài ở phần trên để tính toán các kết quả tương tự cho mô hình này, sau đó so sánh với các kết quả tính toán bằng phương pháp suy diễn mờ và nội suy mờ trong [4].

Để thuật tiện cho việc tính toán, các giá trị NB, NS, PB, ZO,... trong mô hình này được chuyển dịch tương ứng với các giá trị của biến ngôn ngữ diễn tả mức độ lớn nhỏ với tập nền là đoạn [0,1] và sử dụng ánh xạ lượng hóa ngữ nghĩa ν với các tham số theo bảng sau, với giả thiết độ đo tính mờ của các gia tử là như nhau và $\alpha = \beta = 1/2$.

Bảng 3

Các giá trị	**Giá trị ngôn ngữ tương ứng**	**Tham số của ν**
NB	More More Small	$\nu(W) = \theta = 0.5, \alpha = \beta = 0.5$
NM	More Possibly Small	
NS	Possibly Little Small	độ đo tính mờ của các gia tử:
ZO	W	$\mu(less) = \mu(possible) =$
PS	Possibly Little Large	$\mu(more) = \mu(very) = 0.25$
PM	More Possibly Large	
PB	More More Large	

Các kết quả liên quan đến ánh xạ lượng hóa ngữ nghĩa ν với các tham số trên xem trong $[1, 2]$.

Sau khi áp dụng phương pháp nội suy vừa nêu trên, ta có bảng kết quả suy diễn sau:

Bảng 4

$e\backslash\Delta e$	MMS	MPS	PLS	W
MMS	0.786458			
MPS	0.703125	0.744792		
PLS	0.703125	0.781250	0.552083	
W	0.828125	0.703125	0.578125	0.5
PLL	0.75000	0.625000	0.532360	
MPL	0.703125	0.584137		
MML	0.635914			

Các giá trị trong Bảng 4 là các giá trị lượng hóa ngữ nghĩa của các biến ngôn ngữ đầu ra $\Delta q'$ tương ứng với giá trị đầu vào e' và $\Delta e'$ (là các giá trị biến ngôn ngữ đã dịch chuyển).

Sử dụng hàm ngược ν^{-1} ta thu được Bảng 5 sau là các giá trị ngôn ngữ đầu ra $\Delta q'$ tương ứng với giá trị đầu vào e' và $\Delta e'$.

Bảng 5

$e\backslash\Delta e$	MMS	MPS	PLS	W
MMS	PossibleMoreLarge			
MPS	MorePossibleLarge	Large		
PLS	MorePossibleLarge	PossibleMoreLarge	LittleLarge	
W	MoreMoreLarge	MorePossibleLarge	PossibleLittleLarge	W
PLL	Large	VeryPossibleLarge	MoreLittleLarge	
MPL	MorePossibleLarge	PossibleLittleLarge		
MML	VeryPossibleLarge			

Từ Bảng 4, quay trở lại với các giá trị ban đầu của mô hình, chuyển từ tập nền $[0, 1]$ sang $[-9, 9]$ ta thu được Bảng 6 là các kết quả tính toán về giá trị vật lý của đầu ra Δq, tương ứng với giá trị đầu vào e và Δe.

Bảng 6

$e\backslash\Delta e$	NB	NM	NS	ZO
NB	5,16			
NM	3,66	4,41		
NS	3,66	5,1	0,94	
ZO	6,0	3,66	1,41	0,0
PS	4,5	2,25	0,6	
PM	3,66	1,52		
PB	2,45			

Như vậy, ta có ba bảng 1, 2, 6 là kết quả tính toán mô hình mờ đã cho theo ba cách khác nhau, trong đó Bảng 1 và Bảng 2 là kết quả tính toán của tác giả [4] còn Bảng 6 là kết quả theo phương pháp nội suy đưa ra trong bài báo này.

Nhận xét

- Dùng nội suy theo phương pháp trên tính được kết quả với mọi giá trị đầu vào, trong khi dùng suy diễn mờ [4] thì chưa hẳn. Ví dụ trường hợp e =NB và Δe =NB chẳng hạn, ở [4] đã chỉ ra trong trường hợp này, suy diễn mờ cho kết quả có hàm thuộc bằng 0 tại mọi điểm (Unknown). Theo phương pháp chúng tôi đưa ra ở trên, kết quả tính được là giá trị ngôn ngữ PossibleMoreLarge và giá trị vật lý tương ứng là 5.16.

- Phương pháp suy diễn đưa ra trong bài này dựa vào bản chất của phép nội suy nên thỏa mãn một trong những điều kiện suy diễn "tốt" là: Nếu đầu vào bằng với giả thiết của một luật nào đó, thì đầu ra bằng với kết luận của luật đó. Trong khi suy diễn mờ thì chưa hẳn, ví dụ trường hợp e =ZO và Δe =NS chẳng hạn.

- Để đánh giá sai số của kết quả tính toán, chúng ta đưa ra đây sai số mô hình của mô hình trên, sau đó so sánh các kết quả tính toán trong bài với kết quả tính toán trong [4] và sai số mô hình để đánh giá.

Sai số mô hình của mô hình trên với giả thiết mọi giá trị của các biến mờ là có sai số như nhau nếu tính theo phương pháp của Cao-Kandel [11] sẽ là:

$$9 - (-9)/(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 18/7.$$

Còn sai số mô hình của mô hình mờ nói trên tính theo phương pháp trong [11], được tính theo các công thức sau:

$Error(B) = \max\{|r(B) - n|/N_B(n) \geqslant 0.5\}$

$Error(B/B') = \min\{\max|r(B) - n|/N_B(n) = N_{B'}(n)\}, Error(B)\}$.

Mô hình mờ $= \max\min\{Error(B/B')\}$.

Trong đó max lấy theo B và min lấy theo B' với B, B' là các biến mờ trong mô hình mờ.$N_B(n)$ là hàm thuộc của biến mờ B còn $r(B)$ là giá trị trung bình của các giá trị n sao cho $N_B(n) = 1$.

Dễ thấy sai số của mô hình tính theo các công thức trên là: 1,5.

Chúng tôi không có số liệu thực của mô hình để xác định sai số tính toán. Tuy nhiên, so sánh với các số liệu tính toán bằng suy diễn mờ và theo phương pháp nội suy mờ [4] trong Bảng 1 và Bảng 2 và kết quả tính toán được theo phương pháp của chúng tôi ở Bảng 6 có sai số với các kết quả tính theo các phương pháp của [4] với sai số mô hình là khá hợp lý vì hiệu số giữa các số liệu tương ứng tính được trong Bảng 2, Bảng 6 và giữa Bảng 6 với Bảng 1 so với sai số mô hình là sai khác không lớn lắm.

4. KẾT LUẬN

Trong các phần trên chúng ta đã chỉ ra rằng ánh xạ lượng hóa ngữ nghĩa là một hàm đo trên đại số gia tử. Hàm đo được xây dựng trên khái niệm ánh xạ này có một số tính chất mềm dẻo hơn hàm đo được nêu trong [2]. Mệnh đề 2.8 chỉ ra rằng, với sai số $\epsilon > 0$ đủ bé cho trước, với $a \in [0, 1]$ luôn xác định được $x \in Dom(X)$ sao cho $|\nu(x) - a| \leqslant \epsilon$. Điều này có một giá trị nhất định trong vấn đề xấp xỉ ngôn ngữ. Một số tính chất thể hiện mối quan hệ giữa độ đo tính mờ fm và hàm đo xây dựng trên khái niệm ánh xạ lượng hóa ngữ nghĩa cũng được chỉ ra.

Chúng ta cũng đưa ra được một phương pháp nội suy mới cho bài toán mô hình mờ đa điều kiện, đa biến. Ngoài việc tính được $\nu(B_0)$ cho kết luận, chúng ta còn tính được bán kính mờ của nó thông qua các bán kính mờ của các biến đầu vào. Bên cạnh đó, khi có được

$\nu(B_0)$, ta có thể rút ra được giá trị ngôn ngữ tương ứng của kết luận, đồng thời ta cũng tính được các giá trị vật lý của đầu ra. Hơn nữa theo chúng tôi, phương pháp đưa ra ở đây tính toán đơn giản.

Các kết quả tính toán trên ví dụ là phù hợp với các kết quả tính toán theo suy diễn mờ kinh điển của Mizumoto trong [4] và có một số ưu điểm khác như đã nhận xét trên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyen Cat Ho, Tran Thai Son, and Le Xuan Viet, Fuzziness measure, quantified semantic mapping and interpolative method of approximate reasoning in medical expert systems, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **18** (3) (2002) 237–252.

[2] N. C. Ho, T. D. Khang, H. V. Nam, N. H. Chau, Hedge algebras, linguistic-valued logic and their application to fuzzy reasoning, inter. *J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based System* **7** (4) (1999) 347–361.

[3] Trần Đình Khang, Xây dựng hàm đo trên đại số gia tử và ứng dụng trong lập luận ngôn ngữ, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **13** (1) (1997).

[4] Trần Đình Khang, Giải bài toán suy diễn mờ tổng quát thông qua nội suy mờ và tích hợp mờ, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **16** (4) (2000).

[5] Trần Đình Khang, Đinh Khắc Dũng, Suy diễn với tập mờ loại 2 dựa trên đại số gia tử, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **19** (1) (2003).

[6] L. T. Hoczy, K. Hirota, Approximate reasoning by linear rule interpolation and general approximation, Int. *J. Approx. Reason* **9** (1993) 197–225.

[7] D. Tikk, P. Baranyi, Comprehensive analysis of a new fuzzy rule interpolation method, *IEEE Trans on Fuzzy Systems* **8** (3) (2000) 281–296.

[8] Kok Wai Wong, T. D. Gedeon, D. Tikk, An improved multidimensional alpha - cut based fuzzy interpolation technique, *Proc. of the Proceeding of Int. Conf. on Artificial Intelligence in Scince and Technology (AISAT 2000)*, Hobart, Tasmania, Australia 17-20, December, 2000, 33–38.

[9] M. Mizumoto, *Improvement methods of fuzzy controls, 3rd IFSA Congr*, Seatle, 1989, 60–62.

[10] Nguyễn Cát Hồ, Trần Thái Sơn, Về sai số của mô hình mờ, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **13** (1) (1997) 66- 72.

[11] W. H. Hsiao, S. M. Chen, C. H. Lee, *A new interpolative reasoning method in sparse rule based systems* **93** (1) (1998).

[12] L. T. Koczy, and K. Hirota, In terpolative reasoning with insufficient evidence in sparse fuzzy rules bases, *Inform. Sci.* **71** (1993) 169- 201.

Nhận bài ngày 10 - 10 - 2003

Nhận lại sau sửa ngày 19 - 9 - 2005