Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T.21, S.3 (2005), 216–229

NGHIÊN CỨU THỰC NGHIỆM MỘT PHƯƠNG PHÁP CHIA MIỀN GIẢI CÁC BÀI TOÁN VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN HỖN HỢP TRONG MIỀN HÌNH HỌC PHỨC TẠP

ĐẶNG QUANG Á[1], VŨ VINH QUANG[2]

[1] *Viện Công nghệ thông tin*
[2] *Khoa CNTT - Đại học Thái Nguyên*

Abstract. In this paper we propose a method of domain decomposition based on the update of conormal derivative of the function to be found for solving elliptic problems with mixed boundary conditions in domains of complicated geometry. The results of experimental study on convergence of the method for examples in domains consisting of two, three or more rectangles with various configuration are presented. These results confirm the applicability of the method for problems complicated in both boundary conditions and geometry of domains.

Tóm tắt. Trong bài báo này chúng tôi đề xuất một phương pháp chia miền giải các bài toán biên elliptic với các điều kiện biên hỗn hợp trong miền hình học phức tạp và trình bày kết quả nghiên cứu thực nghiệm sự hội tụ của phương pháp trên một số thí dụ với các miền cấu thành từ hai, ba hoặc nhiều hơn hình chữ nhật với các cấu hình khác nhau. Các kết quả này khẳng định khả năng áp dụng phương pháp cho các bài toán phức tạp cả về miền hình học và điều kiện biên.

1. MỞ ĐẦU

Trong [1] đã đề xuất một phương pháp chia miền mới giải phương trình elliptic với điều kiện Dirichlet và đã chứng minh được sự hội tụ của phương pháp cũng như chỉ ra tham số lặp tối ưu cho trường hợp miền chữ nhật. Trong bài báo này chúng tôi tiếp tục phát triển phương pháp đó cho các bài toán với các điều kiện biên hỗn hợp Dirichlet và Neumann. Động cơ thúc đẩy chúng tôi phát triển phương pháp này là sự cải thiện một phần về tốc độ hội tụ và thời gian tính toán của phương pháp này so với phương pháp cập nhật hàm trên biên chung mà Saito và Fujita [2] đã sử dụng khi xét bài toán Dirichlet. Sự cải thiện này sẽ được chúng tôi chỉ ra trên một thí dụ trong mục 3 của bài báo.

2. MÔ TẢ PHƯƠNG PHÁP

Xét bài toán

$$-\Delta u = f(x), x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\ell u = \varphi(x), x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

trong đó Ω là miền giới nội trong R^2 với biên Lipschitz $\partial\Omega$ cấu thành từ các phần biên trơn $\partial\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{k} S_j, \Delta$ là toán tử Laplace, ℓ là toán tử điều kiện biên, $f(x)$ và $\varphi(x)$ là các hàm cho trước.

Giả sử rằng

$$\ell u = \ell_i u = \varphi_i(x), x \in S_i, (i = 1, \dots, k), \tag{3}$$

trong đó $\ell_i u = u$ (điều kiện biên Dirichlet), hoặc $\ell_i u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu_i}$ (điều kiện biên Neumann) với ν_i là pháp tuyến ngoài của phần biên S_i.

Ta sẽ nghiên cứu phương pháp chia miền giải bài toán (1), (2) trong các miền hình học phức tạp. Đối với bài toán biên Dirichlet, tức là khi $\ell u = u$, nhiều tác giả đã đề xuất và nghiên cứu các phương pháp chia miền khác nhau (xem, chẳng hạn [2, 5]). Mới đây trong [1] chúng tôi đã đề xuất một phương pháp chia miền mới dựa trên việc tính lại giá trị đạo hàm của nghiệm trên biên chung giữa các miền, phương pháp này có thể xem là ngược đối với phương pháp được nghiên cứu trong [2]. Sự hội tụ của phương pháp và giá trị tối ưu của tham số lặp đã được thiết lập. Theo chúng tôi được biết chưa có nghiên cứu nào được công bố về phương pháp chia miền cho bài toán với các điều kiện biên hỗn hợp. Chính vì thế, trong bài báo này chúng tôi tiếp tục phát triển phương pháp đã được nghiên cứu cho các bài toán với điều kiện biên hỗn hợp trong một số miền hình học phức tạp cấu thành từ hai, ba hoặc nhiều hơn hình chữ nhật con.

Để dễ hình dung ý tưởng của phương pháp , dưới đây chúng tôi mô tả phương pháp chia miền giải bài toán (1), (2) khi miền Ω được chia thành 2 miền Ω_1 và Ω_2 với biên chung Γ.

Ký hiệu $G_i = \partial\Omega_i \setminus \Gamma, u_i = u|_{\Omega_i}, (i = 1, 2)$, trong đó $\partial\Omega_i$ là biên của miền Ω_i. Đặt $g = \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial \nu_1}\right|_{\Gamma}$ với ν_1 là pháp tuyến ngoài của $\partial\Omega_1$.

Quá trình lặp ở mức vi phân được thực hiện như sau: xuất phát từ xấp xỉ ban đầu $g^{(0)}$, với $k = 0, 1, 2, ...$ giải liên tiếp 2 bài toán

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{(k)} = f & \text{trong } \Omega_1, \\ \ell u_1^{(k)} = \varphi & \text{trên } G_1, \\ \dfrac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \nu_1} = g^{(k)} & \text{trên } \Gamma, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{(k)} = f & \text{trong } \Omega_2, \\ \ell u_2^{(k)} = \varphi & \text{trên } G_2, \\ u_2^{(k)} = u_1^{(k)} & \text{trên } \Gamma. \end{cases} \tag{4}$$

Xấp xỉ mới của g được tính theo công thức

$$g^{(k+1)} = \theta g^{(k)} - (1-\theta) \left.\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial \nu_2}\right|_{\Gamma}, \tag{5}$$

trong đó θ là tham số lặp cần chọn để quá trình lặp hội tụ.

Trong trường hợp miền của bài toán được chia thành $n+1$ miền con với các biên chung $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ phương pháp lặp (3)-(5) sẽ được áp dụng để hiệu chỉnh đạo hàm pháp tuyến của hàm trên các biên chung. Tham số lặp θ trên mỗi biên chung có thể khác nhau.

Để hiện thực hoá phương pháp lặp (3)-(5) chúng tôi thay các bài toán vi phân (3), (4) bởi các lược đồ sai phân có xấp xỉ bậc 2 và sử dụng công thức sai phân cùng bậc để tính đạo hàm pháp tuyến trong (5).

Khi các miền con là hình chữ nhật chúng tôi đã xây dựng bộ chương trình giải các bài toán vi phân ứng với mỗi bài toán vi phân (3), (4) và các loại điều kiện biên hỗn hợp khác nhau.

Ký hiệu L_1 và L_2 là độ dài của các cạnh hình chữ nhật, $h = L_1/M,\ k = L_2/N$ là các bước lưới trên các cạnh, $(M+1), (N+1)$ là các số điểm nút trên mỗi cạnh. Sử dụng phương pháp sai phân ta chuyển bài toán về dạng phương trình hệ vectơ 3 điểm.

$$-Y_{j-1} + CY_j - Y_{j+1} = F_j, 1 \leqslant j \leqslant N-1, Y_0 = F_0, Y_N = F_N, \tag{6}$$

$$\begin{cases} CY_0 - 2Y_1 & = F_0, \quad j = 0, \\ -Y_{j-1} + CY_j - Y_{j+1} & = F_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant N-1, \\ -2Y_{N-1} + CY_N & = F_N, \quad j = N, N = 2^n, \end{cases} \tag{7}$$

đối với bài toán biên hỗn hợp, trong đó Y_j là các vectơ nghiệm, F_j là các vectơ M chiều chứa các giá trị hàm vế phải và giá trị hàm hoặc đạo hàm trên biên, C là một ma trận 3 đường chéo thoả mãn tính chất chéo trội.

Ký hiệu $b1, b2, b3, b4$ là các giá trị biên Dirichlet hoặc Neumann trên các biên trái, phải, dưới và trên của miền chữ nhật. Áp dụng các thuật toán thu gọn hoàn toàn [4] giải hệ các phương trình vectơ 3 điểm để thu được các ma trận nghiệm tại các điểm lưới, chúng tôi tiến hành xây dựng các thủ tục bằng ngôn ngữ MATLAB để giải các bài toán cơ bản sau:

+ $U0000(b1, b2, b3, b4, L_1, L_2, M, N)$ trả lại nghiệm của bài toán trong trường hợp $b1, b2, b3, b4$ là các giá trị biên Dirichlet.

+ $U1000(b1, b2, b3, b4, L_1, L_2, M, N)$ trả lại nghiệm của bài toán trong trường hợp $b1$ là giá trị biên Neumann, $b2, b3, b4$ là các giá trị biên Dirichlet.

+ $U0100(b1, b2, b3, b4, L_1, L_2, M, N)$ trả lại nghiệm của bài toán trong trường hợp $b2$ là giá trị biên Neumann, $b1, b3, b4$ là các giá trị biên Dirichlet.

+ $U0010(b1, b2, b3, b4, L_1, L_2, M, N)$ trả lại nghiệm của bài toán trong trường hợp $b3$ là giá trị biên Neumann, $b1, b2, b4$ là các giá trị biên Dirichlet.

+ $U0001(b1, b2, b3, b4, L_1, L_2, M, N)$ trả lại nghiệm của bài toán trong trường hợp $b4$ là giá trị biên Neumann, $b1, b2, b3$ là các giá trị biên Dirichlet.

Các thủ tục hàm

$U0101(b1, b2, b3, b4, L_1, L_2, M, N), U1001(b1, b2, b3, b4, L_1, L_2, M, N),$

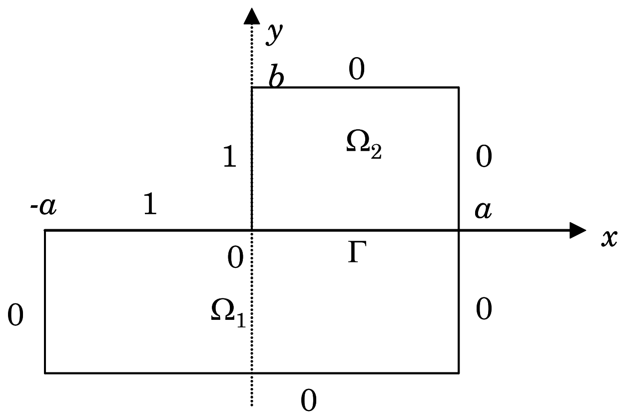
$U0110(b1, b2, b3, b4, L_1, L_2, M, N), U1010(b1, b2, b3, b4, L_1, L_2, M, N),$
được ký hiệu là các thủ tục hàm trả lại nghiệm của bài toán trong trường hợp có hai biên Neumann kề nhau.

3. THỰC NGHIỆM GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN

Sử dụng phương pháp lặp đã đề xuất cùng với các thủ tục hàm đã xây dựng, chúng tôi tiến hành tính toán thực nghiệm cho một số trường hợp chia miền đối với các bài toán biên hỗn hợp trong các miền hình học phức tạp mà các tác giả khác chưa đề cấp đến. Trong các bài toán này chúng tôi chọn trước các hàm u^* là nghiệm đúng, còn các điều kiện biên và vế phải được tính từ u^*. Quá trình lặp được thực hiện cho đến khi độ lệch của hai xấp xỉ liên tiếp $u^{(k)}$ và $u^{(k-1)}$ tính theo chuẩn đều của hàm lưới nhỏ hơn độ chính xác ϵ cho trước. Dưới đây, nếu không chỉ rõ giá trị của ϵ thì chúng ta sẽ lấy $\epsilon = 10^{-4}$.

Bài toán 1.

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ trong miền } \Omega, \\ \quad u = \varphi, \text{ trên } \{-a \leqslant x \leqslant a, y = -b\} \cup \{0 \leqslant x \leqslant a, y = b\} \\ \cup \{x = -a, -b \leqslant y \leqslant 0\} \cup \{x = a, -b \leqslant y \leqslant b\}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \beta(x) \text{ trên } \{-a \leqslant x \leqslant 0, y = 0\}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = g(y) \text{ trên } \{x = 0, 0 \leqslant y \leqslant b\}, (\text{Hình } 1). \end{cases}$$



Hình 1

1 - Biên Neumann; 0 - Biên Dirichlet

Chia Ω thành hai miền Ω_1 và Ω_2 bởi biên chung $\Gamma = \{0 \leqslant x \leqslant a, y = 0\}$ và ký hiệu u_i là nghiệm trong $\Omega_i, (i = 1, 2), \xi = \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{\Gamma}$.

Việc giải bài toán được thực hiện bởi quá trình lặp sau đây:

Cho trước $\xi^{(0)} = 0$. Với $k = 0, 1, \dots$ thực hiện các bước sau:

Bước 1: Giải bài toán trong miền Ω_1

Tìm nghiệm $u_1^{(k)} = U0001(\dots)$ trong đó $b1, b2, b3$ là các giá trị trên các phần biên đã biết,

$$b4 = \begin{cases} \xi^{(k)}, 0 \leqslant x \leqslant a, y = 0, \\ \beta(x), -a \leqslant x \leqslant 0, y = 0. \end{cases}$$

Bước 2: Giải bài toán trong miền Ω_2

Tìm nghiệm $u_2^{(k)} = U1000(\dots)$ trong đó $b1, b2, b4$ là các giá trị trên các phần biên đã biết, $b3 = u_1^{(k)}$ là giá trị biên nhận được từ bài toán trong miền Ω_1.

Bước 3: Tính xấp xỉ của hàm ξ trên Γ : $\xi^{(k+1)} = \theta\xi^{(k)} + (1-\theta)\dfrac{\partial u_2^{(k)}}{\partial y}\Big|_\Gamma$.

Kết quả thực nghiệm khảo sát sự hội tụ của phương pháp phụ thuộc tham số lặp được cho trong bảng dưới đây, trong đó cột "Sai số" chỉ sai số của nghiệm gần đúng so với nghiệm đúng trong chuẩn đều. Tiêu chuẩn dừng lặp là $\epsilon = 10^{-4}$.

Kết quả: Kích thước miền $a = b = 1$, lưới chia 64×64.

u^*=10x(1-x)y(1-y)			u^*=10x(1-x)y^2(1-y)			$u^* = \sin x \sin y$		
Tham số teta	Sai số	Số lần lặp	Tham số teta	Sai số	Số lần lặp	Tham số teta	Sai số	Số lần lặp
0.3	2.10^{-6}	18	0.3	5.10^{-5}	10	0.3	7.10^{-6}	15
0.4	9.10^{-7}	11	0.4	6.10^{-5}	6	0.4	6.10^{-6}	8
0.5	3.10^{-7}	6	0.5	5.10^{-5}	5	0.5	6.10^{-6}	6
0.6	2.10^{-6}	10	0.6	4.10^{-5}	8	0.6	7.10^{-6}	11
0.7	2.10^{-6}	16	0.7	5.10^{-5}	12	0.7	7.10^{-6}	16

Kết luận: Sơ đồ lặp giải bài toán trên hội tụ khá nhanh với giá trị tham số lặp được chọn trong khoảng $(0.3, 0.7)$, giá trị tối ưu xấp xỉ bằng 0.5.

Nhận xét: Với cách chia miền như Hình 1 chúng tôi đã giải bài toán bằng cách lặp cập nhật giá trị của hàm trên biên chung Γ như ý tưởng của Saito-Fujita [2]. Khi đó thứ tự giải các bài toán trong các miền con phải thực hiện ngược lại: đầu tiên trong Ω_2 giải bài toán với điều kiện biên Dirichlet trên Γ, sau đó trong Ω_1 giải bài toán với điều kiện biên Neumann trên Γ . Kết quả thực nghiệm về tốc độ hội tụ và thời gian tính toán của phương pháp cập nhật đạo hàm được mô tả ở trên và phương pháp cập nhật hàm [2] trên thí dụ, trong đó nghiệm đúng là hàm $u = 10x(1-x)y^2(1-y)$ đối với lưới 32×32 và 64×64 được cho trong các bảng sau.

Bảng 1. Lưới 32×32 và $\epsilon = 10^{-3}$

	phương pháp cập nhật đạo hàm			phương pháp Saito-Fujita		
Tham số teta	Số lần lặp	Thời gian tính (giây)	Sai số	Số lần lặp	Thời gian tính (giây)	Sai số
0.3	7	2.1	9.10^{-4}	14	4.0	5.10^{-4}
0.4	5	1.6	3.10^{-4}	9	2.7	5.10^{-4}
0.5	4	1.3	3.10^{-4}	6	1.9	2.10^{-4}
0.6	6	1.9	4.10^{-4}	7	2.1	4.10^{-4}
0.7	9	2.6	5.10^{-4}	11	3.1	7.10^{-4}

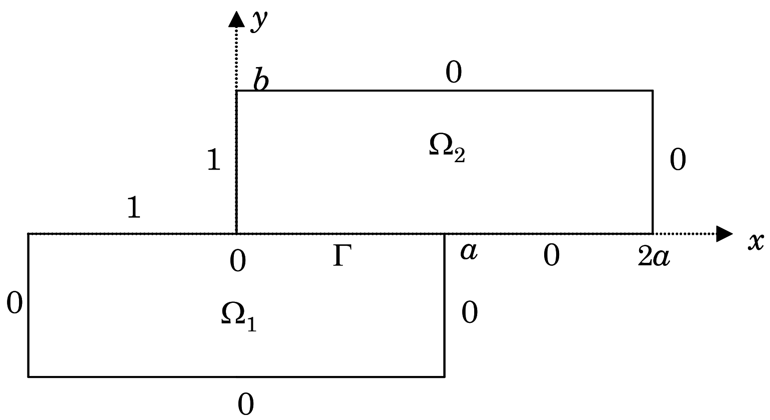
So sánh kết quả thực nghiệm về hai phương pháp dễ thấy rằng phương pháp cập nhật đạo hàm của chúng tôi có phần nhanh hơn phương pháp cập nhật hàm trong [2]. Chính điều này là động cơ thúc đẩy chúng tôi phát triển phương pháp cập nhật đạo hàm để giải các bài toán khác phức tạp hơn.

Bảng 2. Lưới 64×64 và $\epsilon = 10^{-4}$

	phương pháp cập nhật đạo hàm			phương pháp Saito-Fujita		
Tham số teta	Số lần lặp	Thời gian tính (giây)	Sai số	Số lần lặp	Thời gian tính (giây)	Sai số
0.3	10	10.7	5.10^{-5}	14	14.9	7.10^{-5}
0.4	6	6.6	6.10^{-4}	7	7.6	5.10^{-5}
0.45	5	5.6	2.10^{-5}	8	8.6	2.10^{-5}
0.5	5	5.6	5.10^{-5}	6	6.6	4.10^{-5}
0.55	6	6.6	8.10^{-5}	7	7.6	7.10^{-5}

Bài toán 2.

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ trong miền } \Omega, \\ \quad u = \varphi, \ \text{trên } \{-a \leqslant x \leqslant a, y = -b\} \cup \{0 \leqslant x \leqslant 2a, y = b\} \\ \cup \{x = -a, -b \leqslant y \leqslant 0\} \cup \{x = 2a, 0 \leqslant y \leqslant b\}, \\ \cup \{a \leqslant x \leqslant 2a, y = 0\} \cup \{x = a, -b \leqslant y \leqslant 0\}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \beta(x) \text{ trên } \{-a \leqslant x \leqslant 0, y = 0\}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = g(y) \text{ trên } \{x = 0, 0 \leqslant y \leqslant b\}, \text{(Hình 2).} \end{cases}$$



Hình 2

1 - Biên Neumann; 0 - Biên Dirichlet

Chia Ω thành hai miền Ω_1 và Ω_2 bởi biên chung $\Gamma = \{0 \leqslant x \leqslant a, y = 0\}$, ký hiệu u_i là nghiệm triên miền $\Omega_i, (i = 1, 2), \xi = \dfrac{\partial u_1}{\partial y}\Big|_\Gamma$.

Việc giải bài toán được thực hiện bởi quá trình lặp sau đây:

Cho trước $\xi^{(0)} = 0$. Với $k = 0, 1, \dots$ thực hiện các bước sau:

Bước 1: Giải bài toán trong miền Ω_1

Tìm nghiệm $u_1^{(k)} = U0001(\dots)$ trong đó $b1, b2, b3$ là các giá trị trên các phần biên đã biết,

$$b4 = \begin{cases} \xi^{(k)}, 0 \leqslant x \leqslant a, y = 0, \\ \beta(x), -a \leqslant x \leqslant 0, y = 0. \end{cases}$$

Bước 2: Giải bài toán trong miền Ω_2

Tìm nghiệm $u_2^{(k)} = U1000(\dots)$ trong đó $b1, b2, b4$ là các giá trị trên các phần biên đã biết,

$$b3 = \begin{cases} u_1^{(k)} \text{ là giá trị biên nhận được từ bài toán 1}, \\ \varphi(x), a \leqslant x \leqslant 2a, y = 0. \end{cases}$$

Bước 3: Hiệu chỉnh giá trị của hàm ξ trên $\Gamma : \xi^{(k+1)} = \theta\xi^{(k)} + (1-\theta)\dfrac{\partial u_2^{(k)}}{\partial y}\Big|_{\Gamma}$.

Kết quả: Kích thước miền $a = b = 1$, lưới chia 64×64.

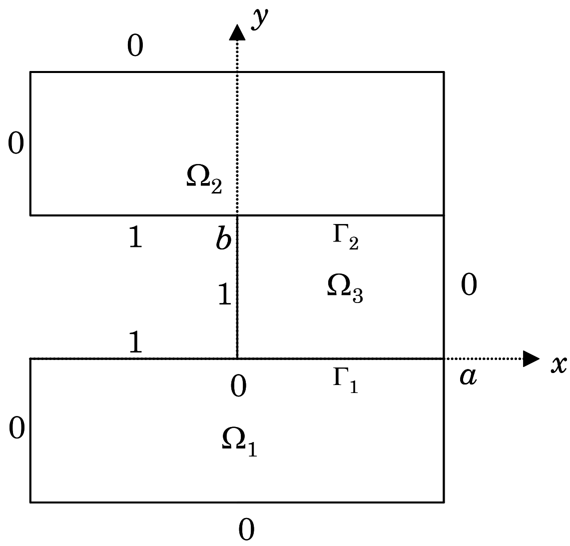
u^*=10x(1-x)y(1-y)			u*=10x(1-x)y^2(1-y)			$u^* = \sin x \sin y$		
Tham số teta	Sai số	Số lần lặp	Tham số teta	Sai số	Số lần lặp	Tham số teta	Sai số	Số lần lặp
0.1	0.036	20	0.1	0.021	20	0.1	0.014	20
0.2	3.10^{-4}	20	0.2	8.10^{-4}	17	0.2	1.10^{-4}	20
0.3	1.10^{-6}	18	0.3	8.10^{-4}	10	0.3	7.10^{-6}	15
0.4	2.10^{-6}	10	0.4	8.10^{-4}	6	0.4	7.10^{-6}	9
0.5	5.10^{-7}	8	0.5	8.10^{-4}	4	0.5	7.10^{-6}	5
0.6	1.10^{-6}	12	0.6	8.10^{-4}	6	0.6	7.10^{-6}	8
0.7	2.10^{-6}	18	0.7	8.10^{-4}	8	0.7	7.10^{-6}	13
0.8	2.10^{-4}	20	0.8	8.10^{-4}	15	0.8	6.10^{-6}	20
0.9	0.019	20	0.9	0.0049	20	0.9	0.0015	20

Kết luận: Sơ đồ lặp giải bài toán trên hội tụ với giá trị tham số lặp được chọn trong khoảng $(0.1, 0.9)$, giá trị tối ưu xấp xỉ bằng 0.5.

Bài toán 3.

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ trong miền } \Omega, \\ \quad u = \varphi, \text{ trên } \{-a \leqslant x \leqslant a, y = -b\} \cup \{-a \leqslant x \leqslant a, y = 2b\} \\ \cup\{x = -a, -b \leqslant y \leqslant 0\} \cup \{x = -a, b \leqslant y \leqslant 2b\}, \cup\{x = a, -b \leqslant y \leqslant 2b, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \beta(x) \text{ trên } \{-a \leqslant x \leqslant 0, y = 0\} \cup \{-a \leqslant x \leqslant 0, y = b\}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = g(y) \text{ trên } \{x = 0, 0 \leqslant y \leqslant b\}, \text{(Hình 3)}. \end{cases}$$

Chia Ω thành ba miền Ω_1, Ω_2 và Ω_3 bởi 2 biên chung $\Gamma_1 = \{0 \leqslant x \leqslant a, y = 0\}$ và $\Gamma_2 = \{0 \leqslant x \leqslant a, y = b\}$ ký hiệu u_i là nghiệm trong 3 miền $\Omega_i, (i = 1, 2, 3), \xi_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial y}\Big|_{\Gamma_1}, \xi_2 = \dfrac{\partial u_2}{\partial y}\Big|_{\Gamma_2}$.



Hình 3

1 - Biên Neumann; 0 - Biên Dirichlet

Việc giải bài toán được thực hiện bởi quá trình lặp sau đây:

Khởi động $\xi_1^{(0)} = 0, \xi_2^{(0)} = 0$. Với $k = 0, 1, \ldots$ thực hiện các bước sau:

Bước 1: Giải bài toán 1 trong miền Ω_1

Tìm nghiệm $u_1^{(k)} = U0001(\ldots)$ trong đó $b1, b2, b3$ là các giá trị trên các phần biên đã biết,

$$b4 = \begin{cases} \xi_1^{(k)}, 0 \leqslant x \leqslant a, y = 0, \\ \beta(x), -a \leqslant x \leqslant 0, y = 0. \end{cases}$$

Bước 2: Giải bài toán 2 trong miền Ω_2

Tìm nghiệm $u_2^{(k)} = U0010(\ldots)$ trong đó $b1, b2, b4$ là các giá trị trên các phần biên đã biết,

$$b3 = \begin{cases} \xi_2^{(k)}, 0 \leqslant x \leqslant a, y = b, \\ \beta(x), -a \leqslant x \leqslant 0, y = 0. \end{cases}$$

Bước 3: Giải bài toán trong miền Ω_3

Tìm nghiệm $u_3^{(k)} = U1000(\ldots)$ trong đó $b1, b2$ là các giá trị trên các phần biên đã biết, $b3 = u_1^{(k)}$ là giá trị biên nhận được từ bài toán 1, $b4 = u_2^{(k)}$ là giá trị biên nhận được từ bài toán 2.

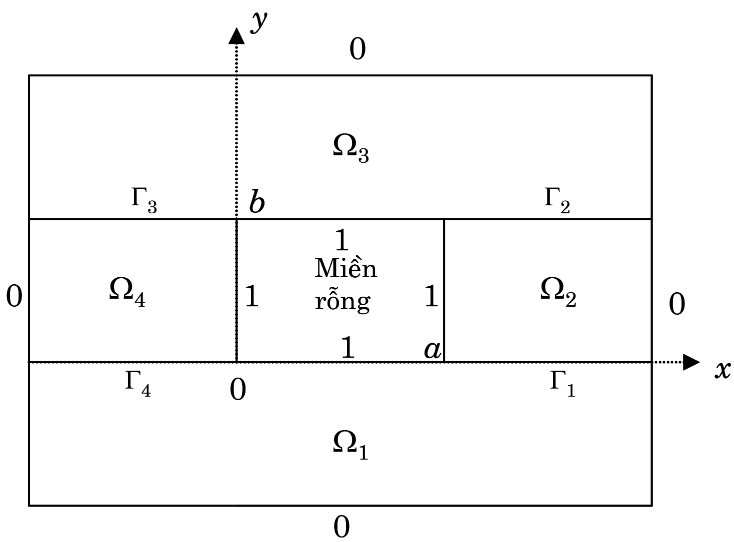
Bước 4: Điều chỉnh giá trị trên các biên chung $\xi_1^{(k+1)} = \theta_1 \xi_1^{(k)} + (1-\theta_1) \dfrac{\partial u_3^{(k)}}{\partial y}\Big|_{\Gamma_1}, \xi_2^{(k+1)} = \theta_2 \xi_2^{(k)} - (1-\theta_2) \dfrac{\partial u_3^{(k)}}{\partial y}\Big|_{\Gamma_2}$.

Kết quả: Kích thước miền $a = b = 1$, lưới chia 64×64.

u^*=10x(1-x)y(1-y)			u^*=10x(1-x)y^2(1-y)			$u^* = \sin x \sin y$		
Tham số $\theta_1 = \theta_2$	Sai số	Số lần lặp	Tham số $\theta_1 = \theta_2$	Sai số	Số lần lặp	Tham số $\theta_1 = \theta_2$	Sai số	Số lần lặp
0.3	Không hội tụ		0.3	Không hội tụ		0.3	Không hội tụ	
0.4	2.10^{-5}	30	0.4	7.10^{-4}	19	0.4	8.10^{-6}	30
0.5	2.10^{-6}	15	0.5	8.10^{-4}	8	0.5	8.10^{-6}	13
0.6	2.10^{-6}	13	0.6	8.10^{-4}	8	0.6	8.10^{-6}	14
0.7	2.10^{-6}	20	0.7	8.10^{-4}	13	0.7	8.10^{-6}	20
0.8	7.10^{-6}	30	0.8	8.10^{-4}	20	0.8	8.10^{-6}	30
0.9	0.0045	30	0.9	0.002	30	0.9	3.10^{-4}	30

Kết luận: Sơ đồ lặp giải bài toán trên hội tụ với các giá trị tham số lặp được chọn trong khoảng $(0.4, 0.9)$, giá trị tối ưu trong khoảng $(0.5, 0.6)$.

Bài toán 4.



Hình 4

1 - Biên Neumann; 0 - Biên Dirichlet

Xét bài toán

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ trên miền } \Omega, \\ \quad u = \varphi, \text{ trên biên } \{-a \leqslant x \leqslant 2a, y = -b\} \cup \{-a \leqslant x \leqslant 2a, y = 2b\} \\ \cup \{x = -a, -b \leqslant y \leqslant 2b\} \cup \{x = 2a, -b \leqslant y \leqslant 2b\}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \beta(x) \text{ trên } \{0 \leqslant x \leqslant a, y = 0\} \cup \{0 \leqslant x \leqslant a, y = b\}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = g(y) \text{ trên } \{x = 0, 0 \leqslant y \leqslant b\} \cup \{x = a, 0 \leqslant y \leqslant b\}, \text{(Hình 4).} \end{cases}$$

Chia Ω thành 4 miền $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ bởi 4 biên chung $\Gamma_1 = \{a \leqslant x \leqslant 2a, y = 0\}, \Gamma_2 = \{a \leqslant x \leqslant 2a, y = b\}, \Gamma_3 = \{-a \leqslant x \leqslant 0, y = b\}$ và $\Gamma_4 = \{-a \leqslant x \leqslant 0, y = 0\}$, ký hiệu u_i là nghiệm trong 4 miền $\Omega_i, (i = 1, \dots, 4)$, $\xi_1 = \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{\Gamma_1}, \xi_2 = \left.\dfrac{\partial u_3}{\partial y}\right|_{\Gamma_2}, \xi_3 = \left.\dfrac{\partial u_3}{\partial y}\right|_{\Gamma_3}, \xi_4 = \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{\Gamma_4}$.

Việc giải bài toán được thực hiện bởi quá trình lặp sau đây:

Khởi động $\xi_1^{(0)} = 0, \xi_2^{(0)} = 0, \xi_3^{(0)} = 0, \xi_4^{(0)} = 0$. Với $k = 0, 1, \dots$ thực hiện các bước sau:

Bước 1: Giải bài toán 1 trong miền Ω_1

Tìm nghiệm $u_1^{(k)} = U0001(\dots)$ trong đó $b1, b2, b3$ là các giá trị trên các phần biên đã biết,

$$b4 = \begin{cases} \xi_1^{(k)}, a \leqslant x \leqslant 2a, y = 0, \\ \beta(x), 0 \leqslant x \leqslant a, y = 0, \\ \xi_4^{(k)}, -a \leqslant x \leqslant 0, y = 0. \end{cases}$$

Bước 2: Giải bài toán 2 trong miền Ω_2

Tìm nghiệm $u_3^{(k)} = U0010(\dots)$ trong đó $b1, b2, b4$ là giá trị trên các phần biên đã biết,

$$b3 = \begin{cases} \xi_3^{(k)}, -a \leqslant x \leqslant 0, y = b, \\ \beta(x), 0 \leqslant x \leqslant a, y = b, \\ \xi_2^{(k)}, a \leqslant x \leqslant 2a, y = b. \end{cases}$$

Bước 3: Giải bài toán trong miền Ω_2

Tìm nghiệm $u_2^{(k)} = U1000(\dots)$ trong đó $b1, b2$ là giá trị trên các phần biên đã biết, $b3 = u_1^{(k)}$ là giá trị biên nhận được từ bài toán 1, $b4 = u_3^{(k)}$ là giá trị biên nhận được từ bài toán 2.

Bước 4: Giải bài toán trong miền Ω_4

Tìm nghiệm $u_4^{(k)} = U0001(\dots)$ trong đó $b1, b2$ là giá trị trên các phần biên đã biết, $b3 = u_1^{(k)}$ là giá trị biên nhận được từ bài toán 1, $b4 = u_3^{(k)}$ là giá trị biên nhận được từ bài toán 2.

Bước 5: Điều chỉnh các giá trị trên các biên chung

$$\xi_1^{(k+1)} = \theta_1 \xi_1^{(k)} + (1 - \theta_1) \left.\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial y}\right|_{\Gamma_1}, \xi_2^{(k+1)} = \theta_2 \xi_2^{(k)} - (1 - \theta_2) \left.\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial y}\right|_{\Gamma_2},$$

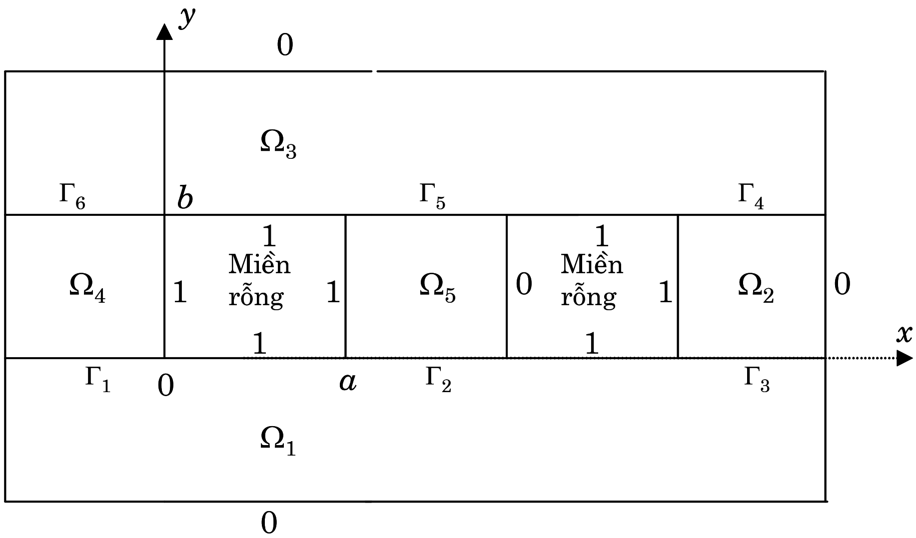
$$\xi_3^{(k+1)} = \theta_3 \xi_3^{(k)} - (1 - \theta_3) \left.\frac{\partial u_4^{(k)}}{\partial y}\right|_{\Gamma_3}, \xi_4^{(k+1)} = \theta_4 \xi_4^{(k)} + (1 - \theta_4) \left.\frac{\partial u_4^{(k)}}{\partial y}\right|_{\Gamma_4},$$

Kết quả: Kích thước miền $a = b = 1$, lưới chia 64×64.

u^*=10x(1-x)y(1-y)			u^*=10x(1-x)y^2(1-y)			$u^* = \sin x \sin y$		
Tham số $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4$	Sai số	Số lần lặp	Tham số $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4$	Sai số	Số lần lặp	Tham số $\theta_1 = \theta_2$ $\theta_3 = \theta_4$	Sai số	Số lần lặp
0.3	Không hội tụ		0.3	Không hội tụ		0.3	Không hội tụ	
0.4	0.0016	30	0.4	3.10^{-4}	30	0.4	2.10^{-4}	30
0.5	5.10^{-7}	22	0.5	2.10^{-4}	12	0.5	1.10^{-5}	15
0.6	4.10^{-7}	17	0.6	2.10^{-4}	12	0.6	1.10^{-5}	16
0.7	5.10^{-7}	25	0.7	2.10^{-4}	20	0.7	1.10^{-5}	22
0.8	3.10^{-5}	30	0.8	2.10^{-4}	30	0.8	1.10^{-5}	30
0.9	0.0087	30	0.9	0.0042	30	0.9	0.0012	30

Kết luận: Sơ đồ lặp giải bài toán trên hội tụ với giá trị tham số lặp được chọn trong khoảng $(0.4, 0.9)$, giá trị tối ưu trong khoảng $(0.5, 0.6)$.

Bài toán 5.



Hình 5

1 - Biên Neumann; 0 - Biên Dirichlet

$$
\begin{cases}
-\Delta u = f \text{ trong miền } \Omega, \\
\quad u = \varphi \text{ trên biên } \{-a \leqslant x \leqslant 4a, y = -b\} \cup \{-a \leqslant x \leqslant 4a, y = 2b\} \\
\cup \{x = -a, -b \leqslant y \leqslant 2b\} \cup \{x = 4a, -b \leqslant y \leqslant 2b\} \cup \{x = 2a, 0 \leqslant y \leqslant b\}, \\
\dfrac{\partial u}{\partial x} = g(y) \text{ trên } \{x = 0, 0 \leqslant x \leqslant b\} \cup \{x = a, 0 \leqslant y \leqslant b\} \\
\cup \{x = 3a, 0 \leqslant y \leqslant b\}, \\
\dfrac{\partial u}{\partial y} = \beta(x) \text{ trên } \{0 \leqslant x \leqslant a, y = 0\} \cup \{2a \leqslant x \leqslant 3a, y = 0\} \\
\cup \{0 \leqslant x \leqslant a, y = b\} \cup \{2a \leqslant x \leqslant 3a, y = b\} (\text{Hình } 5).
\end{cases}
$$

Chia Ω thành 6 miền $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5, \Omega_6$ bởi 6 biên chung $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$, ký hiệu u_i là nghiệm trong 6 miền $\Omega_i, (i = 1, \ldots, 6)$, ký hiệu

$$\xi_1 = \frac{\partial u_1}{\partial y}\Big|_{\Gamma_1}, \xi_2 = \frac{\partial u_1}{\partial y}\Big|_{\Gamma_2}, \ \xi_3 = \frac{\partial u_1}{\partial y}\Big|_{\Gamma_3}, \xi_4 = \frac{\partial u_3}{\partial y}\Big|_{\Gamma_4}, \xi_5 = \frac{\partial u_3}{\partial y}\Big|_{\Gamma_5}, \xi_6 = \frac{\partial u_3}{\partial y}\Big|_{\Gamma_6}$$

là các giá trị đạo hàm trên các biên chung Γ_i tương ứng $(i = 1, \ldots, 6)$.

Việc giải bài toán được thực hiện bởi quá trình lặp sau đây:

Khởi động $\xi_1^{(0)} = 0, \xi_2^{(0)} = 0, \xi_3^{(0)} = 0, \xi_4^{(0)} = 0, \xi_5^{(0)} = 0, \xi_6^{(0)} = 0$.

Với $k = 0, 1, \ldots$ thực hiện các bước sau:

Bước 1: Giải bài toán 1 trong miền Ω_1

Tìm nghiệm $u_1^{(k)} = U0001(\ldots)$ trong đó $b1, b2, b3$ là các giá trị trên các phần biên đã biết,

$$b4 = \begin{cases} \xi_1^{(k)}, -a \leqslant x \leqslant 0, y = 0, \\ \beta(x), 0 \leqslant x \leqslant a, y = 0, \\ \xi_2^{(k)}, a \leqslant x \leqslant 2a, y = 0, \\ \beta(x), 2a \leqslant x \leqslant 3a, y = 0, \\ \xi_3^{(k)}, 3a \leqslant x \leqslant 4a, y = 0. \end{cases}$$

Bước 2: Giải bài toán 2 trong miền Ω_3

Tìm nghiệm $u_3^{(k)} = U0010(\ldots)$ trong đó $b1, b2, b4$ là giá trị trên biên đã biết,

$$b3 = \begin{cases} \xi_4^{(k)}, 3a \leqslant x \leqslant 4a, y = b, \\ \beta(x), 0 \leqslant x \leqslant a, y = b, \\ \xi_5^{(k)}, a \leqslant x \leqslant 2a, y = b, \\ \beta(x), 2a \leqslant x \leqslant 3a, y = b, \\ \xi_6^{(k)}, -a \leqslant x \leqslant 0, y = b. \end{cases}$$

Bước 3: Giải bài toán trong miền Ω_2

Tìm nghiệm $u_2^{(k)} = U1000(\ldots)$ trong đó $b1, b2$ là giá trị trên biên đã biết, $b3 = u_1^{(k)}$ là giá trị biên nhận được từ bài toán 1, $b4 = u_3^{(k)}$ là giá trị biên nhận được từ bài toán 2.

Bước 4: Giải bài toán trong miền Ω_4

Tìm nghiệm $u_4^{(k)} = U0100(\ldots)$ trong đó $b1, b2$ là giá trị trên biên đã biết, $b3 = u_1^{(k)}$ là giá trị biên nhận được từ bài toán 1, $b4 = u_3^{(k)}$ là giá trị biên nhận được từ bài toán 2.

Bước 5: Giải bài toán trong miền Ω_5

Tìm nghiệm $u_5^{(k)} = U1000(\ldots)$ trong đó $b1, b2$ là giá trị trên biên đã biết, $b3 = u_1^{(k)}$ là giá trị biên nhận được từ bài toán 1, $b4 = u_3^{(k)}$ là giá trị biên nhận được từ bài toán 2.

Bước 6: Điều chỉnh các giá trị trên các biên chung

$$\xi_1^{(k+1)} = \theta_1 \xi_1^{(k)} + (1 - \theta_1) \frac{\partial u_4^{(k)}}{\partial y}\Big|_{\Gamma_1}, \xi_2^{(k+1)} = \theta_2 \xi_2^{(k)} + (1 - \theta_2) \frac{\partial u_5^{(k)}}{\partial y}\Big|_{\Gamma_2},$$

$$\xi_3^{(k+1)} = \theta_3 \xi_3^{(k)} + (1-\theta_3)\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial y}\bigg|_{\Gamma_3}, \xi_4^{(k+1)} = \theta_4 \xi_4^{(k)} - (1-\theta_4)\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial y}\bigg|_{\Gamma_4},$$

$$\xi_5^{(k+1)} = \theta_5 \xi_5^{(k)} - (1-\theta_5)\frac{\partial u_5^{(k)}}{\partial y}\bigg|_{\Gamma_5}, \xi_6^{(k+1)} = \theta_6 \xi_6^{(k)} - (1-\theta_6)\frac{\partial u_4^{(k)}}{\partial y}\bigg|_{\Gamma_6},$$

$k = k + 1$.

Kết quả: Kích thước miền $a = b = 1$, lưới chia 64×64.

u^*=10x(1-x)y(1-y)			u^*=10x(1-x)y^2(1-y)			$u^* = \sin x \sin y$		
Tham số θ_k	Sai số	Số lần lặp	Tham số θ_k	Sai số	Số lần lặp	Tham số θ_k	Sai số	Số lần lặp
0.5	Không hội tụ		0.5	Không hội tụ		0.5	Không hội tụ	
0.6	0.0032	13	0.6	0.005	30	0.6	6.10^{-5}	30
0.7	1.10^{-6}	30	0.7	0.0048	18	0.7	1.10^{-5}	22
0.8	0.001	30	0.8	0.0048	30	0.8	2.10^{-5}	30
0.9	Không hội tụ		0.9	Không hội tụ		0.9	Không hội tụ	

Kết luận: Sơ đồ lặp giải bài toán trên hội tụ với giá trị tham số lặp được chọn trong khoảng $(0.6, 0.8)$, giá trị tối ưu xấp xỉ 0.7.

4. NHẬN XÉT CUỐI CÙNG

Trên cơ sở kết quả thực nghiệm đã thu được, chúng tôi có một số kết luận và nhận xét sau đây:

+ Đối với bài toán biên elliptic với điều kiện biên hỗn hợp trong các miền hình học phức tạp thì việc sử dụng phương pháp chia miền là khả thi vì luôn đưa về được một số hữu hạn các bài toán dạng cơ bản.

+ Đối với điều kiện biên hỗn hợp thì phương pháp sử dụng lặp đạo hàm trên biên tỏ ra hữu hiệu hơn phương pháp sử dụng lặp giá trị hàm trên biên.

+ Việc lựa chọn tham số tối ưu trong việc hiệu chỉnh các đạo hàm trên biên nhất là trong trường hợp cùng một lúc sử dụng nhiều dãy lặp chưa khẳng định bằng lí thuyết, nhưng qua kết quả thực nghiệm cho thấy rằng phương pháp hội tụ với tham số θ nhận giá trị trong khoảng $(0.4, 0.8)$ và giá trị tối ưu phụ thuộc từng bài toán.

+ Với phương pháp đã đề xuất có khả năng giải quyết được các bài toán biên elliptic với điều kiện biên hỗn hợp trong các miền hình học rất phức tạp.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Dang Q. A., Vu V. Quang, Domain decomposition method for solving an elliptic boundary value problem, *Proceedings of the ICAM Ha Noi*, 2004, (to appear).

[2] Saito N., Fujita H., *Operator Theoretical Analysis to Domain Decomposition methods*, 12^{th} Int. Conf. on Domain Decomposition Problems, Editors: Tony chan, Takashi, Hideo, Oliver Pinoneau, 2001, www. DDM.org, 63 - 70.

[3] Dang Q. A., Domain decomposition method for solving a strongly mixed boudary value problem, *Proceedings of ICAM Hanoi*, 2004, (to appear).

[4] Samarski A. A., Nikolaev E. C., *Numerical methods for grid equations*, Moscow, Nauka, 1978 (Russian).

[5] Rice J. R., Vavalis E. A., Yang D, Analysis of a nonoverlapping domain decomposition method for elliptic partial differential equations, *Journal of Comput. and Appl. Math.* **87** (1) (1997) 11–19.

[6] Osmolovski V. G, Rivkind V. Ia, A decomposition method for elliptic equations with discontinuous coeffcients, *U.S.S.R Comput. Math. and Math. Phys.* **21** (1) (1981) 33–38.

Nhận bài ngày 22 - 4 - 2005

Nhận lại sau sửa ngày 11 - 10 -2005