Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T.24, S.2 (2008), 97–106

LUẬT CHUYỂN GIA TỬ VÀ TÍNH CHẤT BAO HÀM

TRẦN ĐÌNH KHANG

Trường Đại học Bách khoa Hà Nội

Abstract. The paper deals with common properties of fuzzy sets and hedge algebra theory, which are the subsumption and the meaning inheritance properties. To satisfy the subsumption property by hedges moving on hedge algebras, the paper introduces a new class of monotone hedge algebras and studies its characteristics. These properties are useful for analyzing fuzzy systems, where both of the moving hedges rules and fuzzy operators are applied.

Tóm tắt. Bài báo đề cập đến các tính chất quen thuộc khi sử dụng tập mờ và đại số gia tử là tính chất bao hàm và tính chất kế thừa ngữ nghĩa. Để các xử lý trên đại số gia tử thỏa mãn tính chất bao hàm khi chuyển gia tử, bài báo đề xuất lớp đại số gia tử đơn điệu và trình bày các đặc trưng của đại số gia tử này. Đây là các tính chất hữu ích trong các xử lý ở các hệ thống sử dụng luật chuyển gia tử kết hợp với xử lý thông tin mờ.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Ngày nay, sự phát triển của khoa học máy tính đã đem lại cho chúng ta những công cụ hữu hiệu trợ giúp cuộc sống và sự phát triển của loài người. Một trong những vấn đề thu hút nhiều sự quan tâm là mô hình hóa được cách biểu đạt và tư duy dựa trên ngôn ngữ tự nhiên của con người. Với lý thuyết tập mờ [3] chúng ta có một công cụ biểu diễn ngữ nghĩa cho nhiều khái niệm ngôn ngữ, thông qua hàm thuộc trên không gian nền, và các trạng từ nhấn được diễn dịch như là các toán tử một ngôi, biến đổi hàm thuộc của khái niệm gốc, ví dụ, *rất già* = *già*^{2}, nghĩa là, $\mu_{rất\ già}(u) = \mu_{già}(u)^2$, với u là một phần tử của tập TUỔI $[0, 150]$. Lưu ý rằng, với $\mu_{già}(u) \leq [0, 1]$, thì luôn có $\mu_{rất\ già}(u) = \mu_{già}(u)^2 \leq \mu_{già}(u)$, $\forall u \in$TUỔI. Đây chính là tính chất bao hàm trong lý thuyết tập mờ, và điều này hợp lý trong cách tư duy của con người, những người *rất già* thì đương nhiên cũng được xếp vào tập *già*.

Tiếp theo, chúng ta có thể dùng vài trạng từ tác động liên tiếp vào một khái niệm, ví dụ, "Ecuador nằm ở *tây bắc Nam Mỹ*", có thể hiểu vị trí của nước Ecuador nằm ở phía tây của phía bắc của lục địa Nam Mỹ. Như vậy, các trạng từ này tác động biến đổi ngữ nghĩa của nhau, chứ không chỉ đơn thuần tác động vào khái niệm gốc. Việc mô hình hóa bằng hàm số mũ như ở ví dụ TUỔI chưa diễn dịch được trường hợp này, có thể làm cho *rất tương đối già* có ngữ nghĩa giống hệt *tương đối rất già*, nếu *tương đối già* = *già*$^{0.5}$. Lý thuyết về đại số gia tử [1,2] đã quan sát thêm sự tác động của các trạng từ nhấn vào nhau trong một cấu trúc dàn, có *rất tương đối già* $\leq$ *già* $\leq$ *tương đối rất già*. Đây là tính chất kế thừa ngữ nghĩa. Nếu $hc \leq kc$ thì $h'hc \leq k'kc$, $\forall h, k$ thuộc tập các trạng từ nhấn.

Việc xây dựng các hàm thuộc cho một tập các giá trị ngôn ngữ của một biến ngôn ngữ để thỏa mãn cả tính chất bao hàm và tính chất kế thừa ngữ nghĩa đã được khảo sát trong [4]. Vậy vấn đề có thể quan tâm ở đây là tính chất bao hàm có thỏa mãn trong các phương pháp xử lý với đại số gia tử hay không ?

Với một hệ thống sử dụng tri thức biểu diễn với cấu trúc đại số gia tử, trong các tài liệu tham khảo, thường kết hợp hai cách tiếp cận trong các xử lý là:
(i) Lượng hóa đại số gia tử, thông qua ánh xạ định lượng ngữ nghĩa $v : X \rightarrow [0, 1]$, để xử lý giống như với tập mờ, và
(ii) Tính toán trực tiếp trên các giá trị ngôn ngữ thông qua thứ tự ngữ nghĩa và các luật chuyển gia tử $((p, hu), \sigma t) \Leftrightarrow ((p, u), \sigma ht)$.

Về hướng tiếp cận thứ hai, đã có các nghiên cứu ứng dụng cấu trúc ngữ nghĩa của gia tử trong tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử hoặc các biến đổi khái niệm trong logic mô tả mờ. Các nghiên cứu này đều ít nhiều sử dụng các luật chuyển gia tử. Tuy nhiên, dù sử dụng luật chuyển gia tử thì trong nhiều trường hợp vẫn phải sử dụng các tính chất của tập mờ, mà trong đó có tính chất bao hàm.

Xuất phát từ thứ tự *rất c* $\geq$ *c* $\geq$ *rất tương đối c* $\geq$ *tương đối c* $\geq$ *ít c* $\geq$ *rất ít c*... theo lý thuyết đại số gia tử, ta hãy xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1

Từ mệnh đề:

"Nam là	già	là	rất tương đối đúng"	chuyển thành
	$\downarrow$		$\Downarrow$	
"Nam là	tương đối già	là	rất đúng".	

có *tương đối già* $\leq$ *già* và *rất đúng* $\geq$ *rất tương đối đúng*, nghĩa là khi giá trị ngôn ngữ "yếu" đi thì giá trị chân lý sẽ "mạnh" lên, và ngược lại. Viêc ngữ nghĩa của giá trị ngôn ngữ và giá trị chân lý trong một mệnh đề tăng hay giảm theo hai hướng ngược nhau là hợp lý trong thực tế.

Xét một ví dụ khác.

Ví dụ 2

Từ mệnh đề:

"Bắc là	rất ít già	là	đúng"	chuyển thành
	$\downarrow$		$\Downarrow$	
"Bắc là	ít già	là	rất đúng".	

có ít già $\geq$ rất ít già và rất đúng $\geq$ đúng.

Trong trường hợp này, cả giá trị ngôn ngữ và giá trị chân lý của mệnh đề sau đều "mạnh" hơn so với mệnh đề trước, chứ không biến đổi theo hai hướng ngược nhau. Như vậy, xét theo quan hệ thứ tự trong đại số gia tử, nếu giá trị chân lý của mệnh đề sau mạnh hơn giá trị chân lý của mệnh đề trước, *rất đúng* $\geq$ *rất tương đối đúng, rất đúng* $\geq$ *đúng*, thì việc sử dụng luật chuyển gia tử cho ta giá trị ngôn ngữ của mệnh đề sau, khi thì "yếu" hơn giá trị ngôn ngữ của mệnh đề trước như ở Ví dụ 1, **tương đối già** $\leq$ **già**, khi thì "mạnh" hơn như ở Ví dụ 2, **ít già** $\geq$ **rất ít già**.

Bài báo này sẽ xem xét các trường hợp chuyển gia tử nào thì hợp lý theo ngữ cảnh lý thuyết tập mờ, bởi vì đại số gia tử cũng là một công cụ biểu diễn và xử lý các thông tin ngôn ngữ không đầy đủ, không chắc chắn giống như tập mờ, và trong nhiều trường hợp, khi cần biểu diễn ngữ nghĩa của các giá trị ngôn ngữ thông qua tập mờ, thì tính chất bao hàm cũng cần được xét đến, và có mối liên hệ giữa tính chất bao hàm với thứ tự của các phần tử trong đại số gia tử. Ngoài ra, thứ tự các phần tử trong đại số gia tử lại phụ thuộc vào sự tác động của các gia tử vào nhau và vào khái niệm gốc là "dương" hoặc "âm". Như vậy, chúng ta có thể xuất phát từ quan hệ tác động giữa các gia tử để khảo sát tính chất bao hàm khi thực hiện chuyển gia tử. Bài báo này gồm có 4 phần: Phần 2 phân tích về tính chất bao hàm khi chuyển gia tử, Phần 3 trình bày về đại số gia tử đơn điệu và Phần 4 là kết luận.

2. TÍNH CHẤT BAO HÀM KHI CHUYỂN GIA TỬ

Trước tiên, chúng ta nhắc lại tính chất bao hàm trong lý thuyết tập mờ:

Cho 2 tập mờ A, B xác định trên cùng không gian nền U, ta nói rằng A được bao hàm trong B ($A \subset B$) nếu $\forall x \in U : \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$.

Tiếp theo là sự tác động giữa các gia tử trong đại số gia tử:

Cho đại số gia tử $(X, G, H, \leq)$ với X là tập các giá trị ngôn ngữ, G là tập các phần tử sinh, H là tập các gia tử và $\leq$ là quan hệ thứ tự trong đại số gia tử, thì trong tập gia tử H, các gia tử có thể tác động là tăng hay giảm ngữ nghĩa của nhau, theo một quan hệ SIGN : $H \times (H \cup \{c\}) \rightarrow \{1, -1\}$, với $c \in G$.

Quan hệ SIGN thể hiện cách hiểu về mức độ tăng hay giảm ngữ nghĩa khi tác động thêm gia tử trong ngôn ngữ tự nhiên, được mọi người cùng thừa nhận. Quan hệ này cần được thiết lập trước cùng với tập gia tử trong bất cứ đại số gia tử nào. Trong các tài liệu tham khảo, SIGN được sử dụng để tính hàm định lượng ngữ nghĩa cho các phần tử trong đại số gia tử.

Ví dụ 3. Cho đại số gia tử với các gia tử {very, more, possible, little} có quan hệ tác động SIGN như sau:

	very	more	c	possible	little
very	1	1	1	-1	1
more	1	1	1	-1	1
possible	-1	-1	-1	1	-1
little	-1	-1	-1	1	-1

Lưu ý: Trong các nghiên cứu gần đây, hàm định lượng ngữ nghĩa thường được định nghĩa cho đại số gia tử tuyến tính có tính chất đối xứng, chỉ có một phần tử sinh dương và một phần tử sinh âm. Ví dụ, biến TUỔI có *già* là phần tử sinh dương và *trẻ* là phần tử sinh âm, biến CHÂNLÝ có *đúng* là dương và *sai* là âm. Theo đó, chúng ta có thể thiết lập một quan hệ thứ tự trên toàn bộ tập các giá trị của một đại số gia tử bằng cách sử dụng một hàm dấu *sig* như sau (giống như khi tính giá trị hàm định lượng ngữ nghĩa [2]):

$$sig(c^+) = 1,\ sig(c^-) = -1,\ sig(hc) = \text{SIGN}(h, c) {*} sig(c),\ sig(h'h\sigma c) = \text{SIGN}(h', h) {*} sig(h\sigma c),$$

với c^+ là phần tử sinh dương, c^- là phần tử sinh âm, $c \in \{c^+, c^-\}$, σ là một xâu gia tử.

Từ đó,

$hc \geq c$, nếu $\text{SIGN}(h, c) * sig(c) = 1$,

$hc \leq c$, nếu $\mathrm{SIGN}(h, c) * sig(c) = -1$,
$h'h\sigma c \geq h\sigma c$, nếu $\mathrm{SIGN}(h', h) * sig(h\sigma c) = 1$,
$h'h\sigma c \leq h\sigma c$, nếu $SIGN(h', h) * sig(h\sigma c) = -1$.

Như vậy, cho giá trị ngôn ngữ $\sigma c = h_n h_{n-1}...h_1 c$ thì từ quy tắc trên, ta có:

$$\begin{aligned} sig(\sigma c) &= \mathrm{SIGN}(h_n, h_{n-1}) * sig(h_{n-1}...h_1 c) \\ &= \mathrm{SIGN}(h_n, h_{n-1}) * \mathrm{SIGN}(h_{n-1}, h_{n-2}) * ... * \mathrm{SIGN}(h_2, h_1) * \mathrm{SIGN}(h_1, c) * sig(c) \end{aligned} \quad (*)$$

$h\sigma c \geq \sigma c$, nếu $\mathrm{SIGN}(h, h_n) * sig(\sigma c) = 1$, hay là

$$\mathrm{SIGN}(h, h_n) * \mathrm{SIGN}(h_n, h_{n-1}) * ... * \mathrm{SIGN}(h_2, h_1) * \mathrm{SIGN}(h_1, c) * sig(c) = 1. \quad (**)$$

Và $h\sigma c \leq \sigma c$, nếu $\mathrm{SIGN}(h, h_n) * sig(\sigma c) = -1$.

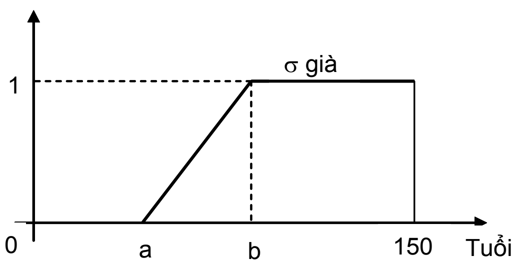
Do đó, nếu h và σ cho trước thì quan hệ thứ tự của $h\sigma c$ và σc sẽ phụ thuộc vào $sig(c)$, nghĩa là phụ thuộc vào việc c là phần tử sinh dương hay phần tử sinh âm. Ta gọi đó là tính chất đối ngẫu trong đại số gia tử đối xứng. Với tính chất này, trong các phân tích ở dưới, chúng ta chỉ cần xét một trường hợp cho phần tử sinh dương, còn với phần tử sinh âm, sẽ phải đảo lại quan hệ thứ tự.

Ngoài ra, từ (*) và (**), ta cũng thấy rằng, nếu $h\sigma c \geq \sigma c$ thì có $sig(h\sigma c) = 1$, (giá trị sig thể hiện xu hướng của xâu $h\sigma c$). Khi đó, nếu có gia tử h' tác động thêm vào $h\sigma c$ thì quan hệ thứ tự của $h'h\sigma c$ và $h\sigma c$ phụ thuộc vào giá trị $\mathrm{SIGN}(h', h)$ bằng 1 hay -1.

Để tạo mối liên quan giữa tập mờ và đại số gia tử, trong các tính toán tiếp theo, chúng ta sẽ biểu diễn ngữ nghĩa của các giá trị ngôn ngữ thuộc đại số gia tử bởi các tập mờ, thỏa mãn tính chất kế thừa ngữ nghĩa. Trong [4], đã trình bày một số cách biểu diễn tập mờ tam giác, tập mờ hàm số mũ... thỏa mãn tính chất kế thừa ngữ nghĩa, với các tham số của các tập mờ được xác định từ hàm định lượng ngữ nghĩa của đại số gia tử.

Ví dụ 4. Biến TUỔI

Dùng tập mờ hình thang $(a, b, 150, 150)$, với $a, b \in [0, 150]$ là không gian nền của TUỔI.



Từ định nghĩa của tính chất bao hàm, ta có $\sigma\,già(a_1, b_1, 150, 150)$ bao hàm trong $\sigma\,già(a_2, b_2, 150, 150)$, nếu $a_1 \geq a_2$ và $b_1 \geq b_2$. Ở đây, σ, δ là các xâu gia tử.

Một ví dụ về cách tính a, b tỷ lệ với hàm định lượng ngữ nghĩa của đại số gia tử [4]:

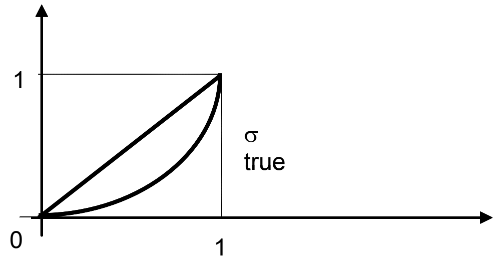
$a = v(\sigma c) * 45 + 10,\ b = v(\sigma c) * 45 + 25$, với $c \in G$.

Từ $v(very\ c) = 0,9375$, "*rất già*" được biểu diễn bằng $(52,1875,\ 67,1875,\ 150,\ 150)$.

Từ $v(possible\ littlec) = 0,578125$, "*có thể ít già*" được biểu diễn bằng $(36,0156,\ 51,0156,\ 150,\ 150)$.

Ví dụ 5. Biến CHÂNLÝ

Dùng tập mờ hàm số mũ x^β, với $\beta > 0,\ x \in [0, 1]$.



Từ định nghĩa của tính chất bao hàm, ta có σ true ($x^{\beta 1}$) bao hàm trong δ true ($x^{\beta 2}$), nếu $\beta_1 \geq \beta_2$.

Một ví dụ về cách tính β từ hàm định lượng ngữ nghĩa của đại số gia tử [4], với $c \in G$

$$\beta = [(2v(\sigma c) - 1)(1 - v(c))]/[(1 - v(\sigma c))(2v(c) - 1)]$$

"*rất đúng*" được biểu diễn bằng x^7,
"*có thể ít đúng*" được biểu diễn bằng $x^{0,1852}$.

Lưu ý là trong các tập mờ biểu diễn σ true thì hàm thuộc tại $x = 1$ thường phải có giá trị bằng 1, và hàm thuộc tại $x = 0$ có giá trị bằng 0. Trong các khảo sát ở dưới, chúng ta sẽ sử dụng tính chất này, để nếu σ true bao hàm trong δ true, thì khi khử mờ, σ true sẽ gần 1 hơn là δ true.

Bây giờ chúng ta sẽ phân tích tiếp về luật chuyển gia tử, giả sử có hai mệnh đề sau là tương đương:

$$(X \text{ là } u) \text{ là } t \text{ và } (X \text{ là } u') \text{ là } t' \qquad (***)$$

Với X là biến ngôn ngữ, u, u' là các giá trị ngôn ngữ và t, t' là các giá trị chân lý, như ở Ví dụ 1, $u =$ *già*, $u' =$ *tương đối già*, $t =$ *rất tương đối đúng*, $t' =$ *rất đúng*. Để dễ dàng cho các tính toán tiếp theo, giả sử u, u', t, t' đều có các phần tử sinh dương, như là *"đúng"*, *"già"* (nếu có phần tử sinh âm thì sẽ phải đảo thứ tự dựa vào tính chất đối ngẫu của đại số gia tử đối xứng).

Nếu nhìn theo khung nhìn của lý thuyết tập mờ, giả sử các giá trị trên có các hàm thuộc $\mu_u, \mu_{u'}, \mu_t, \mu_{t'}$ tương ứng, thì dựa vào nguyên lý mở rộng của Zadeh, ta có

$$\mu_t(\mu_u(w)) = \mu_{t'}(\mu_{u'}(w)) = \tau, \qquad (1)$$

với $w \in U$, là không gian nền của biến X, và $\tau \in [0, 1]$.

Suy ra, $\mu_u(w) = \mu_t^{-1}(\tau),\ \mu_{u'}(w) = \mu_{t'}^{-1}(\tau),$ (2)
với $\mu_t^{-1}, \mu_{t'}^{-1}$ là hàm ngược, ví dụ nếu sử dụng hàm số mũ, τ^β cho hàm thuộc chân lý, thì hàm ngược của hàm thuộc biểu diễn giá trị chân lý có dạng $\tau^{1/\beta}$.

Giả sử thứ tự của u và u' trong đại số gia tử là $u \geq u'$, nghĩa là có hàm định lượng ngữ nghĩa $v(u) \geq v(u')$. Nhìn theo khung nhìn của lý thuyết tập mờ, như ở Ví dụ 4, với tập mờ hình thang, $u = (a, b, 150, 150),\ u' = (a', b', 150, 150)$, có $a \geq a',\ b \geq b'$, hay là

$$\mu_u(w) \leq \mu_{u'}(w), \qquad (3)$$

ta sẽ có u bao hàm trong u', ký hiệu $u \subset u'$.

Từ công thức (2) và (3), suy ra

$$\mu_t^{-1}(\tau) \leq \mu_{t'}^{-1}(\tau). \tag{4}$$

Giả sử, sử dụng hàm số mũ cho hàm thuộc giá trị chân lý như ở Ví dụ 5, $\mu_t, \mu_{t'}$ là đơn điệu tăng, thì $\mu_t^{-1}(\tau) = \tau^{1/\beta}$, $\mu_{t'}^{-1}(\tau) = \tau^{1/\beta}$.

Vì $\tau \in [0, 1]$, nên $1/\beta \geq 1/\beta' \to \beta \leq \beta' \to \mu_{t'}(\tau) \leq \mu_t(\tau) \to t' \subset t$ nghĩa là t' bao hàm trong t.

Tiếp theo, với t' bao hàm trong t, với phần tử sinh dương ("*đúng*"), thì khi khử mờ, t' sẽ cho giá trị gần với 1 hơn là t, hay là $t' \geq t$.

Như vậy, từ $u \geq u'$, suy ra $t' \geq t$. Tương tự, nếu $u' \geq u$, thì có $t \geq t'$.

Bây giờ, chúng ta sẽ phân tích luật chuyển gia tử

$$((p, hu), \sigma t) \Leftrightarrow ((p, u), \sigma ht) \qquad (****-1)$$

của đại số gia tử, ta thấy hai luật (***) và (****-1) là giống nhau, nếu gán các u, u', t, t' tương ứng. Trong trường hợp này, gia tử h được đặt vào phía trong, sát với phần tử sinh t nghĩa là (σht), nên được gọi là luật chuyển gia tử trong. Ngoài ra, còn có khả năng gia tử h được đặt vào vị trí ngoài cùng bên trái của giá trị chân lý $(h\sigma t)$, gọi là luật chuyển gia tử ngoài.

$$((p, hu), \sigma t) \Leftrightarrow ((p, u), h\sigma t). \qquad (****-2)$$

Từ đó định nghĩa tính chất bao hàm khi chuyển gia tử của đại số gia tử.

Định nghĩa 1.
(i) Cho luật chuyển gia tử trong $((p, hu), \sigma t) \Leftrightarrow ((p, u), \sigma ht)$ với u là các giá trị ngôn ngữ có phần tử sinh dương, t là phần tử sinh dương của biến chân lý, σ là xâu gia tử, h là một gia tử. Một đại số gia tử được gọi là thỏa mãn tính chất bao hàm khi chuyển gia tử trong, nếu có:

$$hu \geq u \Leftrightarrow \sigma ht \geq \sigma t \text{ và } hu \leq u \Leftrightarrow \sigma ht \leq \sigma t.$$

(ii) Cho luật chuyển gia tử ngoài $((p, hu), \sigma t) \Leftrightarrow ((p, u), h\sigma t)$ với u là các giá trị ngôn ngữ có phần tử sinh dương, t là phần tử sinh dương của biến chân lý, σ là xâu gia tử, h là một gia tử. Một đại số gia tử được gọi là thỏa mãn tính chất bao hàm khi chuyển gia tử ngoài, nếu có:

$$hu \geq u \Leftrightarrow h\sigma t \geq \sigma t \text{ và } hu \leq u \Leftrightarrow h\sigma t \leq \sigma t.$$

Như các lập luận ở trên, tính chất này được dẫn dắt từ ngữ cảnh của lý thuyết tập mờ, khi gán các hàm thuộc cho các phần tử của đại số gia tử. Tính chất này cũng tỏ ra hợp lý trong ngôn ngữ tự nhiên, khi một khái niệm "chặt" hơn (u' tăng) thì độ tin cậy sẽ "lỏng" đi (t' giảm) và ngược lại. Tuy nhiên, tính chất này không phải lúc nào cũng thỏa mãn trong các đại số gia tử, như ở Ví dụ 2 không thỏa mãn. Phân tích sâu hơn vào Ví dụ 2, nếu xét theo ngữ cảnh của lý thuyết tập mờ,

rất ít già = *rất (ít già)* = *(ít già)*^{2},

thì vẫn thỏa mãn tính chất bao hàm. Nhưng trong đại số gia tử có

rất ít già = *(rất ít) già* $\leq$ *ít già,*

không thỏa mãn.

Vậy vấn đề đặt ra là với đại số gia tử nào thì tính chất bao hàm khi chuyển gia tử (trong, ngoài) được thỏa mãn? Phần tiếp sau đây sẽ thảo luận sâu về tập gia tử và quan hệ tác động SIGN để tìm mối liên quan với tính chất bao hàm.

3. ĐẠI SỐ GIA TỬ ĐƠN ĐIỆU

Xuất phát từ tập gia tử H, và quan hệ tác động SIGN, chúng ta có một số định nghĩa sau.

Định nghĩa 2. Cho tập gia tử H, quan hệ SIGN : $H \times (H \cup \{c\}) \to \{1, -1\}$, với c là một phần tử sinh, ta có:

(i) $H^+ = \{h \in H : \mathrm{SIGN}(h, c) = 1\}$ là tập các gia tử dương,

(ii) $H^- = \{h \in H : \mathrm{SIGN}(h, c) = -1\}$ là tập các gia tử âm,

(iii) Một gia tử $h \in H$ được gọi là đồng nhấn, nếu $\mathrm{SIGN}(h, h) = 1$,

(iv) Một gia tử $h \in H$ được gọi là nghịch nhấn, nếu $\mathrm{SIGN}(h, h) = -1$,

(v) Tập H được gọi là tuyến tính, nếu H^+ và H^- được sắp thứ tự $(\geq)$ và $\forall h, k \in H^+(H^-)$: nếu $h \neq k$ thì có $h > k$ hoặc $h < k$

(vi) Tập H được gọi là thuần nhất, nếu với mọi gia tử $h \in H$ và $k \in H^+$ $(k \in H^-)$, ta đều có:

$\mathrm{SIGN}(h, k') = \mathrm{SIGN}(h, k),\ \forall k' \in H^+\ (k' \in H^-)$,
(trường hợp k và k' thuộc cùng tập H^+ hoặc H^-), và
$\mathrm{SIGN}(h, k') = -\mathrm{SIGN}(h, k),\ \forall k' \in H^-\ (k' \in H^+)$,
(trường hợp k và k' không thuộc cùng tập H^+ hoặc H^-).

Ví dụ 6. Với các gia tử và SIGN như ở Ví dụ 3 thì $H^+ = \{very, more\}$, $H^- = \{possible, little\}$, các gia tử $very, more, possible$ là đồng nhấn, $little$ là nghịch nhấn, tập $\{very, more, possible, little\}$ là không thuần nhất, tập $\{very, more, possible\}$ là thuần nhất.

Kết hợp các tính chất trên, chúng ta có đại số gia tử đơn điệu.

Định nghĩa 3. Một đại số gia tử có tập H thuần nhất, tuyến tính và chỉ chứa các gia tử đồng nhấn thì được gọi là đại số gia tử đơn điệu.

Tiếp theo, ta sẽ xem xét các tính chất của đại số gia tử đơn điệu.

Mệnh đề 1. *Đại số gia tử đơn điệu có các tính chất sau với mỗi* $h, k \in H$

(i) Nếu $\mathrm{SIGN}(h, c) = \mathrm{SIGN}(k, c)$ *thì* $\mathrm{SIGN}(h, k) = 1$.

(ii) Nếu $\mathrm{SIGN}(h, c) = -SIGN(k, c)$ *thì* $SIGN(h, k) = -1$.

Chứng minh:

(i) Cho $\mathrm{SIGN}(h, c) = \mathrm{SIGN}(k, c)$, suy ra h và k cùng thuộc tập H^+ (hoặc H^-).

Vì h đồng nhấn nên $\mathrm{SIGN}(h, h) = 1$.

Vì H thuần nhất nên $\mathrm{SIGN}(h, k) = \mathrm{SIGN}(h, h)$, suy ra $\mathrm{SIGN}(h, k) = 1$.

(ii) Cho $\mathrm{SIGN}(h, c) = -\mathrm{SIGN}(k, c)$, suy ra h và k không cùng thuộc H^+ (hoặc H^-).

Vì h đồng nhấn nên $\mathrm{SIGN}(h, h) = 1$.

Vì H thuần nhất nên $\mathrm{SIGN}(h, h) = -\mathrm{SIGN}(h, k)$, suy ra $\mathrm{SIGN}(h, k) = -1$.

Như vậy, trong đại số gia tử đơn điệu, nếu có hai gia tử cùng thuộc tập H^+ (hoặc H^-), thì sẽ là dương ($\mathrm{SIGN}(h, k) = 1$) khi tác động vào nhau, và nếu khác tập H^+ (hoặc H^-) thì sẽ là âm (SIGN$(h,k) = -1$) khi tác động vào nhau. Vì tập H tuyến tính, nên các tập H^+ và H^- đã được sắp thứ tự. Thêm các tính chất khác của đại số gia tử đơn điệu, ta có thể xây dựng quan hệ thứ tự trong H như sau. ■

Định nghĩa 4. Cho đại số gia tử đơn điệu, cho $h, k \in H \cup \{I\}$, với I là gia tử đơn vị. Ta nói rằng $h \geq k$ khi và chỉ khi

(i) $h \in H^+$ và $k \in H^-$, hoặc

(ii) $h, k \in H^+ \cup \{I\}$ và h có mức độ nhấn mạnh hơn hoặc bằng k, hoặc

(iii) $h, k \in H^- \cup \{I\}$ và h có mức độ nhấn yếu hơn hoặc bằng k,

$h > k$ khi và chỉ khi $h \geq k$ và $h \neq k$.

Ví dụ 7. Cho tập $H = \{very, more, possible\}$, thì thứ tự của các gia tử là

$$very > more > I > possible.$$

Mệnh đề 2. *Cho đại số gia tử đơn điệu với c là phần tử sinh dương, δ là một xâu gia tử, ta có*

$$h \geq k \Leftrightarrow h\delta c \geq k\delta c. \tag{5}$$

Chứng minh:

"$\Rightarrow$": ta chứng minh bằng qui nạp.

• Bước cơ sở: giả sử δ là xâu rỗng thì biểu thức (5) đương nhiên thỏa mãn vì c là phần tử sinh dương.

• Bước qui nạp: giả sử (5) đúng với $\delta = h_n ... h_1$, ta cần chứng minh nó cũng đúng với $\delta' = h_{n+1} h_n ... h_1$. Có hai trường hợp xảy ra với h_{n+1} :

- $h_{n+1} h_n ... h_1 c \geq h_n ... h_1 c = I h_n ... h_1 c$, tức là $h_{n+1}\delta c \geq I\delta c$. Vì (5) thỏa mãn với δ nên suy ra $h_{n+1} \in H^+ \cup \{I\}$ và $h_{n+1} \geq I$. Ngoài ra, từ (*) và (**) sẽ có:

$$sig(\delta' c) = \text{SIGN}(h_{n+1}, h_n) * sig(\delta c) = 1.$$

Ta xét tiếp 3 trường hợp có thể xảy ra với h và k :

+ $h \in H^+$ và $k \in H^-$, nghĩa là SIGN$(h, h_{n+1}) = 1$ và SIGN$(k, h_{n+1}) = -1$, suy ra, SIGN$(h, h_{n+1}) * sig(\delta' c) = 1$ và SIGN$(k, h_{n+1}) * sig(\delta' c) = -1$, do vậy, $h h_{n+1} h_n ... h_1 c \geq h_{n+1} h_n ... h_1 c \geq k h_{n+1} h_n ... h_1 c$, suy ra $h\delta' c \geq k\delta' c$, tức là (5) thỏa với δ'.

+ $h, k \in H^+ \cup \{I\}$ và h có mức độ nhấn mạnh hơn hoặc bằng k, nghĩa là SIGN$(h, h_{n+1}) = 1$ và SIGN$(k, h_{n+1}) = 1$, suy ra, SIGN$(h, h_{n+1}) * sig(\delta' c) = 1$ và SIGN$(k, h_{n+1}) * sig(\delta' c) = 1$, do vậy $h h_{n+1} h_n ... h_1 c \geq k h_{n+1} h_n ... h_1 c \geq h_{n+1} h_n ... h_1 c$, suy ra $h\delta' c \geq k\delta' c$, tức là (5) thỏa với δ'.

+ $h, k \in H^- \cup \{I\}$ và h có mức độ nhấn yếu hơn hoặc bằng k, nghĩa là SIGN$(h, h_{n+1}) = -1$ và SIGN$(k, h_{n+1}) = -1$, suy ra SIGN$(h, h_{n+1}) * sig(\delta' c) = -1$ và SIGN$(k, h_{n+1}) * sig(\delta' c) = -1$, do vậy $h_{n+1} h_n ... h_1 c \geq h h_{n+1} h_n ... h_1 c \geq k h_{n+1} h_n ... h_1 c$, suy ra $h\delta' c \geq k\delta' c$, tức là (5) thỏa với δ'.

- $h_{n+1} h_n ... h_1 c \leq h_n ... h_1 c$, cũng tương tự như trường hợp trên với $sig(\delta' c) = -1$.

Ta thấy, nếu (5) thỏa mãn với δ có độ dài n thì cũng thỏa mãn với δ' có độ dài $n+1$. Do đó (5) thỏa mãn với mọi δ.

"$\Leftarrow$"Chứng minh bằng phản chứng: giả sử $h \geq k$ không thỏa, nghĩa là $h < k$. suy ra $k \geq h$ và $k \neq h$. Theo chứng minh ở chiều "$\Rightarrow$", có $k\delta c \geq h\delta c$, và vì $k \neq h$, nên $k\delta c > h\delta c$, mâu thuẫn với giả thiết. ■

Trên cơ sở của mệnh đề trên, chúng ta sẽ tìm mối liên quan giữa đại số gia tử và tính chất bao hàm khi chuyển gia tử.

Định lý 1. *Đại số gia tử đơn điệu thỏa mãn tính chất bao hàm khi chuyển gia tử ngoài.*

Chứng minh. Cho đại số gia tử đơn điệu, ta cần chứng minh $hu \geq u \Leftrightarrow h\sigma t \geq \sigma t$ và $hu \leq u \Leftrightarrow h\sigma t \leq \sigma t$, với u là các giá trị ngôn ngữ có phần tử sinh dương, t là phần tử sinh dương của biến chân lý, σ là xâu gia tử, h là một gia tử.

Từ $hu \geq u = Iu$, theo Mệnh đề 2, $\Leftrightarrow h \geq I$, áp dụng Mệnh đề 2 một lần nữa, $\Leftrightarrow h\sigma t \geq I\sigma t = \sigma t$.

Tương tự như vậy, chứng minh được $hu \leq u \Leftrightarrow h\sigma t \leq \sigma t$. ■

Về mối liên hệ giữa đại số gia tử đơn điệu và tính chất bao hàm khi chuyển gia tử trong, ta có thể phân tích tiếp như sau.

Từ $hu \geq u = Iu$, theo Mệnh đề 2 có $h \geq I$, suy ra $ht \geq It = t$. Giả sử $\sigma = \sigma' k$, muốn có $\sigma ht \geq \sigma t$, tức là $\sigma' kht \geq \sigma' kt$ thì cần có $h > k$. Trường hợp ngược lại, $hu \leq u$, cũng lập luận tương tự, cần có $h < k$. Vậy ta có định lý sau.

Định lý 2. *Cho luật chuyển gia tử trong* $((p, hu), \sigma t) \Leftrightarrow ((p, u), \sigma ht)$, *với* $\sigma = \sigma' k$, *u là giá trị ngôn ngữ có phần tử sinh dương, t là phần tử sinh dương của biến chân lý, σ, σ' là các xâu gia tử, h, k là các gia tử. Ta có: đại số gia tử đơn điệu thỏa mãn tính chất bao hàm khi chuyển gia tử trong, nếu*

(i) $h \in H^+ \cup \{I\}$ và $h > k$, hoặc

(ii) $h \in H^- \cup \{I\}$ và $h < k$.

Chứng minh: Cho đại số gia tử đơn điệu, ta cần chứng minh $hu \geq u \Leftrightarrow \sigma ht \geq \sigma t$ và $hu \leq u \Leftrightarrow \sigma ht \leq \sigma t$.

"$\Rightarrow$" Từ $hu \geq u = Iu$, theo Mệnh đề 2, $\Leftrightarrow h \geq I$, nghĩa là $h \in H^+ \cup \{I\}$. (trường hợp (i)) Từ giả thiết $h > k$ ($h \geq k$ và $h \neq k$), theo Mệnh đề 2, có $ht \geq kt$ và $ht \neq kt$, hay là $ht > kt$. Áp dụng tính chất kế thừa ngữ nghĩa của đại số gia tử, biểu thức trên suy ra $kht > Ikt = kt$. Tiếp tục áp dụng tính chất kế thừa ngữ nghĩa, ta thu được $\sigma' kht \geq \sigma' kt$, hay là $\sigma ht \geq \sigma t$.

Với $hu \leq u = Iu$, theo Mệnh đề 2, $\Leftrightarrow h \leq I$, nghĩa là $h \in H^- \cup \{I\}$. Ta có trường hợp (ii) với giả thiết $h < k$. Chứng minh tương tự suy ra $\sigma ht \leq \sigma t$.

"$\Leftarrow$" Chứng minh bằng phản chứng. Cho $\sigma ht \geq \sigma t$, giả sử $hu \geq u$ không thỏa, nghĩa là $hu < u$, suy ra $hu \leq Iu$ và $h \neq I$. Theo Mệnh đề 2, có $h \leq I$, suy ra $ht \leq t$. Vì $h \neq I$ nên $ht < t$. Vì $h \leq I$, nên đang ở trường hợp (ii), có $h < k$, suy ra $ht < kt$. Áp dụng tính chất kế thừa ngữ nghĩa của đại số gia tử, ta có $kht < Ikt = kt$. Tiếp tục áp dụng tính chất kế thừa ngữ nghĩa với σ' cho ta $\sigma' kht < \sigma' kt$, hay là $\sigma ht < \sigma t$, mâu thuẫn với giả thiết.

Với $\sigma ht \geq \sigma t$, cũng chứng minh tương tự như vậy, theo trường hợp (i). ■

Thông qua định lý trên, chúng ta giải thích được về Ví dụ 2 không thỏa mãn tính chất bao hàm khi chuyển gia tử là do có gia tử *ít (little)* không phải là gia tử đồng nhấn, đại số gia tử với sự tham gia của *little* không phải là đại số gia tử đơn điệu.

Tuy nhiên, các định lý trên cũng cho thấy, đại số gia tử đơn điệu mới chỉ bảo đảm thỏa mãn tính chất bao hàm khi chuyển gia tử ngoài, còn với luật chuyển gia tử trong, sẽ cần thêm một điều kiện nữa, là gia tử được chuyển cần phải có mức độ nhấn mạnh hơn gia tử đứng sát phần tử sinh của giá trị chân lý (nếu có). Ví dụ, trường hợp sau đây không thỏa mãn:

$$((A, more\ old), very\ true) \text{ và } ((A, old), very\ more\ true).$$

Có *more old* $>$ *old*, nhưng *very more true* $<$ *very true*, không thỏa mãn tính chất bao hàm. Sở dĩ như vậy vì gia tử được chuyển (*more*) lại yếu hơn gia tử đứng sát phần tử sinh của giá trị chân lý (*very*). Để khắc phục trường hợp này, cần chỉnh sửa lại luật chuyển gia tử cho phù hợp, ví dụ chuyển giá trị chân lý *very more true* thành *very very true* ...

4. KẾT LUẬN

Bài báo này đã thảo luận sâu về tính chất bao hàm khi chuyển gia tử để thỏa mãn cả tính chất bao hàm và tính chất kế thừa ngữ nghĩa trong các xử lý kết hợp cả lý thuyết tập mờ và hàm định lượng ngữ nghĩa của đại số gia tử. Đại số gia tử đơn điệu là một lớp đại số gia tử phần nào thỏa mãn tính chất bao hàm khi chuyển gia tử, được hình thành từ việc chọn lọc ra tập gia tử thỏa mãn các tính chất đồng nhấn, thuần nhất, tuyến tính ở quan hệ tác động giữa các gia tử. Có thể sử dụng đại số gia tử đơn điệu làm tập giá trị nền cho biến chân lý ở các logic. Với đại số gia tử tổng quát, để tính chất bao hàm khi chuyển gia tử được thỏa mãn, thì cần phải mở rộng luật chuyển gia tử. Đây là vấn đề sẽ tiếp tục được thảo luận trong thời gian tới.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] N. C.Ho, W. Wechler, Hedge algebras: an algebraic approach to structures of sets of linguistic domains of linguistic truth variable, *Fuzzy Sets and Systems* **35** (1990) 281–293.

[2] N. C. Ho, T. D. Khang, H. V. Nam, N. H. Chau, Hedge algebras, linguistic valued logic and their application to fuzzy reasoning, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems* **7** (1999) 347–361.

[3] L. A.Zadeh, The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, *Information Sciences* **8** (1975) 301–357.

[4] Trần Đình Khang, Hoàng Thị Minh Tâm, Hồ Ngọc Vinh, Một số dạng tập mờ biểu diễn giá trị chân lý ngôn ngữ trong logic mờ, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **22** (2) (2006) 108–116.

Nhận bài ngày 6 - 3 - 2008
Nhận lại sau sửa ngày 7 - 5 -2008