TẠP CHÍ KHOA HỌC TÍNH TOÁN VÀ ĐIỀU KHIỂN TẬP III (1987). Số 1 (8–12)

VỀ SỰ HỘI TỤ CỦA MỘT SƠ ĐỒ SAI PHÂN ĐỐI VỚI BÀI TOÁN BIÊN PHI TUYẾN LOẠI PARABOL

LÊ THIỆN PHỐ
Viện khoa học tính toán và điều khiển

NHIỀU bài toán vật lý kỹ thuật quan trọng được mô tả bằng phương trình loại parabol. Đó là các bài toán truyền nhiệt, khuếch tán, chất lượng nước, chuyển động nước ngầm, v.v... [1, 2]. Nếu như đối với lớp bài toán tuyến tính, người ta đã xây dựng được nhiều sơ đồ sai phân hữu hiệu để thu được lời giải xấp xỉ cũng như khảo sát một phẩm chất ổn định và độ hội tụ của các sơ đồ sai phân [3, 4, 5, 7] thì đối với lớp bài toán phi tuyến các kết quả thu được còn rất hạn chế.

Trong bài này xét đến cách xây dựng một sơ đồ sai phân đối với bài toán biên phi tuyến loại parabol. Với các giả thiết về tính chính quy của nghiệm bài toán liên tục đã chứng minh được sự xấp xỉ và tốc độ hội tụ bậc 2 của sơ đồ sai phân đã xây dựng.

1. Xét bài toán biên phi tuyến loại parabol:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x, t, u) \qquad (1)$$

trong miền $\Omega = \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t < T,$ với điều kiện ban đầu:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < 1 \qquad (2)$$

và điều kiện biên

$$u(0, t) = g_1(t)$$
$$u(1, t) = g_2(t)$$
$$\text{khi} \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Ở đây hệ số $a(x, t, u)$ thỏa mãn: $0 < C_0 < a(x, t, u)$.

2. Dùng lưới sai phân đều với bước thời gian τ, bước không gian h, xấp xỉ miền Ω bằng miền lưới.

$$\overline{\Omega}_{h\tau} = \{(x_i, t_n): x_i = ih, t_n = n\tau, i = 0, 1, \ldots, M+1,$$
$$n = 0, 1, \ldots, N, M + 1 = 1/h, N = [T/\tau]\}.$$

Ở đây $[x]$ ký hiệu phần nguyên của x. Ta dùng các ký hiệu sau:

$U_i^n = U(x_i, t_n)$ giá trị hàm lưới U tại nút (x_i, t_n), $D_x^+ U_i^n = (U_{i+1}^n - U_i^n)/h$ đạo hàm sai phân trước của U tại nút (x_i, t_n).

$D_x^- U_i^n = (U_i^n - U_{i-1}^n)/h$ đạo hàm sai phân sau của U tại nút (x_i, t_n)

$$\tilde{U}_i^n = \frac{2}{3}U_i^n - \frac{1}{2}U_i^{n-1}.$$

$$\overline{a}(U_i^n) = a(x_i - h/2, t_n + \tau/2, (U_i^n + U_{i-1}^n)/2$$

$$U_i^{n+1/2} = (U_i^{n+1} + U_i^n)/2$$

$$\|U^n\| = \left(\sum_{i=1}^{M}(U_i^n)^2 h\right)^{1/2}$$

là chuẩn lưới L_2 của U^n.

Nếu U^n, V^n là 2 hàm lưới với thành phần (U_i^n, V_i^n, $i = 1, 2, \ldots, M$) thì $U^n V^n$ được hiểu là hàm lưới với thành phần (U_i^n , V_i^n, $i = 1, 2, \ldots, M$). Cũng vậy xác định được hàm lưới $U^n V^n W^n$ từ 3 hàm lưới U^n, V^n, W^n.

Bài toán biên (1.3) được xấp xỉ bằng sơ đồ sai phân

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = D_x^+ \left(\overline{a}(\widetilde{U}_i^n) D_x^- U_i^{n+1/2}\right) + f(x_i, t_n + \frac{\tau}{2}, \widetilde{U}_i^n) \tag{4}$$

với $i = 1, 2, \ldots, M$, $n = 1, 2, \ldots, [T/\tau]$

$$U_i^o = \varphi(x_i) \tag{5}$$

$$U_i^1 = U_i^o + \tau\left(D_x^+ \left(a(x_i - \frac{h}{2}, 0, (U_i^o + U_{i-1}^o)/2) D_x^- (U_i^o)\right) + f(x_i, 0, u_i^o)\right) \tag{5'}$$

với $i = 1, 2, \ldots, M$

$$U_o^n = g_1(t_n), \quad U_{M+1}^n = g_2(t_n), \quad n = 0, 1, \ldots, [T/\tau] \tag{6}$$

3. Sự xấp xỉ của sơ đồ sai phân (4) — (6) đối với bài toán biên xuất phát (1) — (3) được cho bởi định lý sau đây:

Định lý 1. Giả thiết:

a) Các hàm $a(x, t, u)$, $f(x, t, u)$ khả vi và có đạo hàm $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial a}{\partial t}$, $\frac{\partial a}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial u}$ giới nội đều trong toàn miền ($\overline{\Omega} \times [-\infty; +\infty]$).

b) Nghiệm u của bài toán biên (1) — (3) thuộc $C^5(\overline{\Omega})$.

Kết luận: Sơ đồ sai phân (4) — (6) xấp xỉ bài toán (1) — (3) bậc $0(\tau^2 + h^2)$ trên nghiệm u của bài toán xuất phát.

Chứng minh: Thay nghiệm u của bài toán (1) — (3) vào sơ đồ sai phân và chứng tỏ rằng độ không khớp 2 vế sơ đồ là có bậc $0(\tau^2 + h^2)$. Quả vậy khi thay u vào 2 vế của (4) sử dụng giả thiết về tính chính qui của u và các hàm a, f ta có:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t}\left(x_i, t_n + \frac{\tau}{2}\right) + 0(\tau^2 + h^2)$$

$$D_x^+\left(\overline{a}(\tilde{u}_i^n) D_x^- u_i^{n+\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\overline{a}(\tilde{u}_{i+1}^n)\frac{u_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_i^{n+\frac{1}{2}}}{h} - \overline{a}(\tilde{u}_i^n)\frac{u_i^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x = x_i,\, t = t_n + \frac{\tau}{2}} + 0(h^2 + \tau^2)$$

$$f(x_i, t_n + \frac{\tau}{2}, \tilde{u}_i^n) = f(x_i, t_n + \frac{\tau}{2}, u(x_i, t_n + \frac{\tau}{2}) + 0(\tau^2))$$

$$= f(x_i, t_n + \frac{\tau}{2}, u(x_i, t_n + \frac{\tau}{2})) + 0(\tau^2)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - D_x^+ \left(\overline{a}(\tilde{u}_i^n) D_x^- u_i^{n+\frac{1}{2}}\right) - f(x_i, t_n + \frac{\tau}{2}, \tilde{u}_i^n) =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(a(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x}) - f(x, t, u)\right)_{x = x_i,\, t = t_n + \frac{\tau}{2}},$$

$$+ 0(\tau^2 + h^2) = 0(\tau^2 + h^2)$$

Điều đó chứng tỏ tính xấp xỉ bậc 2 của phương trình sai phân (4) trên nghiệm u.

Các điều kiện biên sai phân (5), (6) được xấp xỉ chính xác.

Đối với điều kiện biên (5) ta có:

$$u_i^1 - u_i^0 - \tau\left(D_x^+\left(\bar{a}\left(x_i - \frac{h}{2}, 0, (u_i^0 + u_{i-1}^0)/2\,D_x^- u_i^0\right) + f(x_i, t_0, u_i^0\right)\right)$$

$$= \tau\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - f(x, t, u)\right)_{x = x_i,\ t = 0}$$

$$+ 0(\tau^2 + h^2) + 0(\tau^2 + h^k).$$

Vậy sơ đồ (4−6) xấp xỉ bậc $O(\tau^2 + h^2)$ bài toán xuất phát (1−3) trên nghiệm u.

4. Sự hội tụ của sơ đồ được cho bởi định lý sau.

Định lý 2. Với các giả thiết của định lý 1 nghiệm lưới u của sơ đồ sai phân (4−6) hội tụ bậc $O(\tau^2 + h^2)$ tới nghiệm chính xác u của bài toán xuất phát (1−3) theo chuẩn lưới L_2. Nghĩa là ta có các đánh giá:

$$\| u^n - U^n \| \leqslant C(\tau^2 + h^2)$$

$$\| D_x^-(u - U)^{n+\frac{1}{2}} \| \leqslant C(\tau^2 + h^2)$$

với mọi $n = 1, 2, \ldots, [T/\tau]$.

Để chứng minh sự hội tụ ta cần dùng bất đẳng thức Schwarz và bất đẳng thức ε:

$$2|(u, v)| \leqslant \frac{\|u\|^2}{\varepsilon} + \varepsilon \|v\|^2, \ \forall \varepsilon > 0$$

ở đây $(u, v) = \sum_{i=1}^{M} u_i v_i h$ là tích vô hướng và

Bổ đề về bất đẳng thức Gronwall [6]:

Cho Φ, ψ, χ là các hàm không âm xác định đối với $t = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ và χ là không giảm. Nếu:

$$\Phi_k + \psi_k \leqslant \chi_k + C\tau \sum_{m=0}^{k-1} \Phi_m, \quad k = 0, 1, \ldots, N \tag{7}$$

ở đây C là hằng số dương, thì ta có.

$$\Phi_k + \psi_k \leqslant \chi_k e^{ck\tau}, \quad k = 0, 1, \ldots, N \tag{8}$$

Chứng minh định lý 2:

Gọi $e_i^n = u_i^n - U_i^n$ sai số của nghiệm lưới U của sơ đồ (4−6) đối với nghiệm chính xác u của bài toán xuất phát (1−3) tại nút lưới (x_i, t_n). Từ định lý 1 về sự xấp xỉ của sơ đồ ta viết được

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = D_x^+\left(\bar{a}(\tilde{u}_i^n)\,D_x^- u_i^{n+\frac{1}{2}}\right) + f\left(x, t_n + \frac{\tau}{2}, \tilde{u}_i^n\right) + \alpha_i^n \tag{9}$$

$$\alpha_i^n = O(\tau^2 + h^2)$$

từ (4), (9) suy ra:

$$\frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{\tau} = D_x^+\left(\bar{a}(\tilde{U}_i^n)\,D_x^- e_i^{n+\frac{1}{2}}\right) + f\left(x_i, t_n + \frac{\tau}{2}, \tilde{u}_i^n\right)$$

$$- f\left(x_i, t_n + \frac{\tau}{2}, \tilde{U}_i^n\right) + D_x^+\left(\left(\bar{a}(\tilde{u}_i^n) - \bar{a}(\tilde{U}_i^n)\right)D_x^- u_i^{n+\frac{1}{2}}\right) + \alpha_i^n.$$

Do các giả thiết về tính khả vi của a, f phương trình trên được viết lại

$$\frac{e_i^{n+1}-e_i^n}{\tau} - D_x^+\left(\bar a(\tilde U_i^n)\, D_x^-\, e^{n+\frac{1}{2}}\right) = V_i^n\, \tilde e_i^n + D_x^+\left(W_i^n \tilde e_i^n\, D_x^-\, u_i^{n+\frac{1}{2}}\right) + \alpha_i^n$$

Ở đây:

$$V_i^n = \frac{\partial f}{\partial u}\left(x_i,\ t_n+\frac{\tau}{2},\ \xi_i^n\right)$$

$$W_i^n = \frac{\partial a}{\partial u}\left(x_i-\frac{h}{2},\ t_n+\frac{\tau}{2},\ \zeta_i^n\right)$$

ξ_i^n, ζ_i^n là các giá trị trung gian giữa $\tilde u_i^n$ và $\tilde U_i^n$.

Nhân 2 vế phương trình trên với $(e_i^{n+1}-e_i^n)\,h\tau\ (=2e^{n+\frac{1}{2}}h\,\tau)$ và lấy tổng theo $i=1, 2, \dots, M$ ta được:

$$\|e^{n+1}\|^2 - \|e^n\|^2 - 2\left(D_x^+\left(\bar a(\tilde U^n)\, D_x^-\, e^{n+\frac{1}{2}}\right),\ e^{n+\frac{1}{2}}\right)\tau = 2\left(V^n \tilde e^n,\ e^{n+\frac{1}{2}}\right)\tau +$$

$$+2\left(D_x^+\left(W^n \tilde e^n\, D_x^-\, u^{n+\frac{1}{2}}\right),\ e^{n+\frac{1}{2}}\right)\tau$$

Do hàm lưới e nhận giá trị O tại 2 điểm nút biên x_0 và x_{M+1} nên trong các tích vô hướng trên ta có thể chuyển đạo hàm sai phân $-D_x^+$ từ một phía này sang phía kia thành D_x^- và phương trình trên được viết thành:

$$\|e^{n+1}\|^2 = \|e^n\|^2 + 2\left(\bar a(\tilde U^n)\, D_x^-\, e^{n+\frac{1}{2}},\ D_x^-\, e^{n+\frac{1}{2}}\right)\tau = 2\left(V^n \tilde e^n,\ e^{n+\frac{1}{2}}\right)\tau$$

$$-2\left(W^n \tilde e^n\, D_x^-\, u^{n+\frac{1}{2}},\ D_x^-\, e^{n+\frac{1}{2}}\right)\tau + 2\left(\alpha^n,\ e^{n+\frac{1}{2}}\right)\tau \tag{10}$$

Sử dụng bất đẳng thức ε và các giả thiết chính qui của a, u cùng tính giới nội đều của $\frac{\partial a}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ ta có các đánh giá

$$\left(\bar a(\tilde U^n)\, D_x^-\, e^{n+\frac{1}{2}},\ D_x^-\, e^{n+\frac{1}{2}}\right) \geqslant C_0 \|D_x^-\, e^{n+\frac{1}{2}}\|^2$$

$$\left|2\left(V^n \tilde e^n,\ e^{n+\frac{1}{2}}\right)\right| \leqslant 2\|V^n \tilde e^n\|\ \|e^{n+\frac{1}{2}}\|$$

$$\leqslant 2C_1 \|\tilde e^n\|\ \|\tilde e^{n+\frac{1}{2}}\| \leqslant C_1\left(\frac{\|\tilde e^n\|^2}{\varepsilon} + \varepsilon\, \|e^{n+\frac{1}{2}}\|\right)$$

$$\leqslant C_1\left(\frac{\|e^{n-1}\|^2}{2\varepsilon} + \left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{9}{2\varepsilon}\right)\|e^n\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|e^{n+1}\|^2\right)$$

Tương tự ta có:

$$\left|2\left(W^n \tilde e^n D_x^-\, u^{n+\frac{1}{2}},\ D_x^-\, e^{n+\frac{1}{2}}\right)\right| \leqslant \text{const}\left(\frac{9}{2\varepsilon}\|e^n\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|D_x^-\, e^{n+\frac{1}{2}}\|^2\right)$$

$$\left|2\left(\alpha^2,\ e^{n+\frac{1}{2}}\right)\right| \leqslant C_2(\tau^2+h^2)^2 + \frac{\varepsilon}{2}\left(\|e^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2\right).$$

Thay các đánh giá trên vào (10) ta được:

$$\|e^{n+1}\|^2 - \|e^n\|^2 + \left(2C_0 - \frac{\varepsilon C_1}{2}\right)\|D_x^- e^{n+\frac{1}{2}}\|^2\,\tau$$

$$\leqslant \frac{C_1}{2c}\|e^{n-1}\|^2\tau + \left(\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{9}{2\varepsilon}\right)C_1+\frac{\varepsilon}{3}\right)\|e^n\|^2\tau +$$

$$+\varepsilon\left(C_1+\frac{1}{2}\right)\|e^{n+1}\|^2\tau + C_2(\tau^2+h^2)^2\tau.$$

Lấy tổng từ $n = 1, 2, \ldots$ ta được:

$$\|e^{n+1}\|^2 + \left(2C_0 - \frac{\varepsilon C_1}{2}\right)\sum_{i=1}^{n}\|D_x^- e^{i+\frac{1}{2}}\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_2 n\tau(\tau^2+h^2)^2 + C_3\sum_{i=1}^{n}\|e^i\|^2\tau + \varepsilon\left(C_1+\frac{1}{2}\right)\|e^{n+1}\|^2\tau.$$

Chọn ε thỏa mãn $\varepsilon\left(C_1+\frac{1}{2}\right)\tau < \frac{1}{2}$ suy ra

$$\|e^{n+1}\|^2 + a_1\sum_{i=1}^{n}\|D_x^- e^{i+\frac{1}{2}}\|^2\tau \leqslant$$

$$\leqslant a_2 n\tau(\tau^2+h^2)^2 + a_3\sum_{i=1}^{n}\|e^i\|^2$$

ở đây $C_0, C_1, C_2, a_1, a_2, a_3$ là các hằng số dương.

Áp dụng bổ đề Gronwall (7) (8) ta được:

$$\|e^{n+1}\|^2 + a_1\sum_{i=1}^{n}\|D_x^- e^{i+\frac{1}{2}}\|^2\tau \leqslant$$

$$\leqslant a_2 n\tau(\tau^2+h)^2 e^{a_3 n\tau} \leqslant \text{const}(\tau^2+h^2)^2.$$

Định lý 2 được chứng minh xong.

Nhận ngày 1-11-1986.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. S.K. Godunov, Phương trình vật lý toán Nauka, Moskva 1971 (tiếng Nga).

2. P.JA. Polubarinova Kosina, Các phương pháp toán học trong vấn đề tưới. Nauka, Moskva, 1986, (tiếng Nga).

3. A.A. Samarski, A.V.Gulin, Sự ổn định các sơ đồ sai phân Nauka, Moskva, 1978 (tiếng Nga).

4. J. Douglas, A.survey of numerical methods for parabolic differential equations. Advances in computers, vol. 2, F. L..ALt, ed, Academic Press, New York, 1961, pp. 1-54.

5. A.A. Samarski, E.S.Nikolaev, Phương pháp giải phương trình lưới, Nauka, Moskva 1978 (tiếng Nga).

6. M.Lees, A priori estimate for the solutions of difference approximations to parabolic differential equations, Duke Math. J. 27 (1960), pp. 287–311.

7. G. MARŞUK, Các phương pháp toán học tính toán. Nauka, Moskva 1977 (tiếng Nga)

ABSTRACT

This paper deals with a finite difference scheme for a nonlinear boundary problem of parabolic type. Under the essential assumption about the regularity of the solution of the continuous problem a second order convergence rate $O(\tau^2 + h^2)$ is established for the approximate solution of the finite difference scheme.