BÀI TOÁN NP – ĐẦY ĐỦ ĐỐI VỚI LƯỚI PETRI – SUY RỘNG DƯỚI DẠNG SM (self–modifying–net) thuộc lớp P_{SM}^{once}

TRẦN THỌ CHÂU
Khoa Toán–ĐHTH Hà Nội

Việc nhận biết và chứng minh được một bài toán nào đó là NP–đầy đủ, quả là một việc không đơn giản. Tuy vậy, số lượng các bài toán NP–đầy đủ càng ngày càng được nâng lên, góp thêm vào lớp các bài toán NP–đầy đủ đã có từ trước, nhưng trong đó phải nói rằng: số lượng các bài toán NP–đầy đủ của lớp lưới Petri: còn rất ít. Trong bài này, dựa kết quả đã đạt được của R.Valk (xem [1]) và của Araki (xem [2]), chúng ta sẽ chứng minh rằng: bài toán k–bị chặn đối với lớp lưới Petri–suy rộng dạng SM thuộc lớp P_{SM}^{once} là NP–đầy đủ.

1. Các khái niệm, định nghĩa.

Định nghĩa 1: Chúng ta ký hiệu N là tập số tự nhiên không âm. Một lưới Petri–suy rộng dạng PSM là một bộ 5 sau đây:

$N = (P, T, pre, post, M_o)$, trong đó

$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_a\}$ (set of places)

$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_b\}$ (set of transitions)

$P \cap T = \phi$

M_o – là một vectơ a–chiều, là bộ đánh dấu ban đầu. pre – là ánh xạ của tập $P \times \{1\} \times T$ vào $\mathbb{N}$, và post – là ánh xạ của tập $T \times P_1 \times P$ vào $\mathbb{N}$, trong đó

$$P_1 = P \cup \{1\} \quad (1 \in P).$$

Một bộ đánh dấu M là một vectơ a–chiều: $M = (M(P_1), M(P_2), \ldots, M(P_a)) \in \mathbb{N}^{|P|}$ – tập tất cả các bộ đánh dấu a – chiều trên tập hợp P, $M(P_i)$ là số kích động có mặt trong vị trí P_i.

Giả sử $M \in \mathbb{N}^{|P|}$ là một bộ đánh dấu, chúng ta định nghĩa hàm $v_M : P_1 \rightarrow \mathbb{N}$ như sau: $v_M(q) :=$ IF $q \in P$ THEN $M(q)$ ELSE 1.

Định nghĩa 2:

Đối với mỗi thanh chuyền $t \in T$ và một bộ đánh dấu $M \in \mathbb{N}^{|P|}$ chúng ta xác định hai bộ đánh dấu $t_M^-, t_M^+ \in \mathbb{N}^{|P|}$ như sau:

$$t_M^-(P) := \sum_{1 \in P_1} pre(p, 1, t) v_M(1) \qquad (p \in P)$$

$$t_M^+(p) := \sum_{q \in P_1} post(t, q, p).v_M(q) \qquad (p \in P)$$

Định nghĩa 3:

Thanh chuyền $t \in T$ được gọi là có thể cháy (Firable) tại M, nếu $\forall p \in P : M(P) \geqslant t_M^-(p)$.

Định nghĩa 4 : Thanh chuyển $t \in T$ được gọi là có thể cháy từ bộ đánh dấu M đến M' :

$M \xrightarrow{t} M' \Leftrightarrow t$ là có thể cháy tại M và

$\forall p \in P : M'(p) = M(p) + t^{+}_{M}(P) - t^{-}_{M}(P)$

Định nghĩa 5 : Đối với mỗi từ $w = t_{i_1}, t_{i_2} \ldots t_{i_n} \in T^*$ và hai bộ đánh dấu M và M' quan hệ cháy $M \xrightarrow{w} M'$ được định nghĩa bằng cách đệ qui như sau :

$M \xrightarrow{\lambda} M'$ (λ — từ rỗng) và $\forall w \in T^* \ \forall t \in T$:

$M \xrightarrow{wt} M' \Leftrightarrow \exists M'' \in \mathbb{N}^{|P|}$

$M \xrightarrow{w} M''$ & $M'' \xrightarrow{t} M'$.

Ký hiệu :

$R_N(M_0) := \{ M \in \mathbb{N}^{|P|} \mid \exists w \in T^* : M_0 \xrightarrow{w} M \}$ (reachability set)

$L_0(N) := \{ w \in T^* \mid \exists M \in \mathbb{N}^{|P|} : M_0 \xrightarrow{w} M \}$ (firing sequences of N)

Định nghĩa 6 : Lưới Petri suy rộng dạng PSM được gọi là bị chặn nếu tồn tại hằng số b nguyên dương : $\forall M \in R_N(M_0)$ $(M(p) \leqslant b \ \forall p \in P)$.

Định nghĩa 7 : Giả sử $N = (P, T, pre, post, M_0)$ là lưới Petri—suy rộng dạng PSM và $C : P \rightarrow \mathbb{N}$ — là một bộ đánh dấu. Khi đó N được gọi là C — an toàn, nếu lưới N là bị chặn và

$$\forall M \in R_N(M_0) \ (M(P_i) \leqslant C(P_i)) \ (i = 1, 2, \ldots |P|).$$

2. Các kết quả bổ trợ

Định lý 1 (R. Valk) : Bài toán bị chặn đối với lớp lưới Petri—suy rộng dạng PSM là giải được.

Chứng minh : xem [1].

Bổ đề : Giả sử cho $N = (P, T, pre, post, M_0)$ là lưới Petri—suy rộng dạng PSM, và M_1, M_2, $M'_1 \in \mathbb{N}^{|P|}$ & $t \in T$ sao cho $M_1 \xrightarrow{t} M_2$ & $M'_1 > M_1$ & $M'_1 \in R_N(M_1)$.

Khi đó

a) t — là có thể cháy tại M'_1, và $M'_1 \xrightarrow{t} M'_2$ & $M'_2 > M_2$

b) Nếu $M_1 \xrightarrow{w} M_2$ & $M'_1 > M_1$ & $M'_1 \in R_N(M_1)$

thì $M'_1 \xrightarrow{w} M'_2$ & $M'_2 > M_2$ trong đó

$$w = t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_n}.$$

Chứng minh :

a) Theo giả thiết

$M'_1 > M_1 > t^{-}_{M_1}$, nên t — có thể cháy tại M'_1.

Hơn nữa, N là lưới Petri—suy rộng dạng PSM, nên $t^{-}_{M'_1} = t^{-}_{M_1}$.

Mặt khác, vì $M'_1 > M_1$ và $M'_1 \in R_N(M_1)$,

nên $t^{+}_{M'_1} > t^{+}_{M_1}$. Do đó ta có :

$$\Delta t_{M'_1} = t^{+}_{M'_1} - t^{-}_{M'_1} > \Delta t_{M_1} = t^{+}_{M_1} - t^{-}_{M_1}.$$

Vậy ta có :

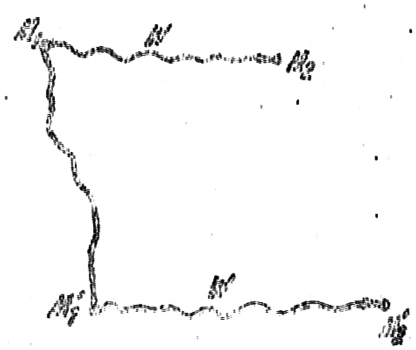
$$M_2' = M_1' + \Delta t_{M_1'} \geq M_1 + \Delta t_{M_1'} \geq M_1 + \Delta t_{M_1} = M_2$$

(xem H. 1).

b) Bằng qui nạp theo độ dài của từ $w = t_1 \ldots t_n \in T^*$ dễ dàng suy ra: (xem H. 2)

$$M_1 \xrightarrow{w} M_2 \; \& \; M_1' \geq M_1 \; \& \; M_1' \in R_N(M_1) \rightarrow M_1' \xrightarrow{w} M_2' \; \& \; M_2' \geq M_2.$$

Hình 1



Hình 2

Từ bổ đề trên và áp dụng thuật toán cây phủ của Volfgang Reisig (xem [4]) và định lý 11.3 (xem Starke [3]), dễ dàng suy ra

Định lý 3: Tồn tại thuật toán cho phép chúng ta xác định được đối với bất kỳ lưới Petri–suy rộng N dạng PSM và bất kỳ một bộ đánh dấu $C: P \rightarrow \mathbb{N}$, có thể khẳng định được: liệu N là C–an toàn hay không.

Và cũng từ định lý này, chúng ta có thể quyết định được bài toán sau đây: cho một lưới Petri–suy rộng N dạng PSM. Hỏi có tồn tại hay không bộ đánh dấu $C: P \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho N là C–an toàn.

3. Định lý NP – đầy đủ đối với lớp lưới Petri–suy rộng dạng PSM

Định nghĩa 8: Lưới Petri–suy rộng dạng SM (self–modifying net) là bộ 5 $N = (P, T, pre, post, M_0)$ trong đó: $P \cap T = \phi$

M_0 là bộ đánh dấu ban đầu, $pre: P \times P_1 \times T \rightarrow \mathbb{N}$, $post: T \times P_1 \times P \rightarrow \mathbb{N}$ $(P_1 = P \cup \{1\})$.

Định nghĩa 9: Giả sử $N = (P, T, pre, post, M_0)$ là một SM–lưới, $k \in \mathbb{N}$ khi đó N được gọi là k–bị chặn nếu $M \, R \, (M_0) \; (M(p_i) \leqslant k) \; \forall_i = 1, 2, \ldots, P$.

Ký hiệu: Chúng ta ký hiệu P_{SM}^{once} là lớp tất cả các lưới Petri suy rộng dạng SM: $N = (P, T, pre, post, M_0)$, trong đó mỗi chuyển của nó cháy cùng lắm là một lần, nghĩa là: đối với mỗi dãy

$$M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} M_2 \rightarrow \ldots \rightarrow M_{k-1} \xrightarrow{t_u} M_u \rightarrow \ldots, \text{ thì } t_j \neq t_k \text{ với } j \neq k$$

Nếu N thuộc lớp P_{SM}^{once} thì N là bộ chặn.

Định lý 4 (NP–đầy đủ): Bài toán sau đây là NP–đầy đủ

Dữ liệu: Cho lưới Petri–suy rộng dạng SM thuộc lớp P_{SM}^{once} và $k \in \mathbb{N}$.

Hỏi: N là $k \in$ bị chặn hay không?

Chứng minh: 1. Dễ dàng thấy rằng bài toán này thuộc lớp NP, vì mỗi dãy cháy bắt đầu từ M_0 có độ dài cùng lắm là T, và thuật toán kiểm tra chỉ cần $(|P| + |P|) \cdot |T|^2$ bước là đủ, hay độ phức tạp tính toán là $o(|P| \cdot |T|^2)$.

2. Bài toán trên dẫn từ bài toán 3–SAT:

Giả sử n là một số nguyên dương và

$$U_n := \{u_1, \overline{u_1}, u_2, \overline{u_2}, \ldots, u_n, \overline{u_n}\} \text{ (literals)}$$

Bài toán 3–SAT:

Vào: cho $Q = \langle n, C_1, C_2, \dots, C_m \rangle$, trong đó:

$$n \leqslant 3m \ \& \ C_j \subseteq U_n \ \& \ |C_j| = 3 \quad \forall j = 1, 2, \dots, m.$$

Hỏi: $\exists$ tập $K = \{z_1, z_2, \dots z_n\}$ sao cho:

$$z_i = \text{hoặc } u_i \text{ hoặc } \overline{u_i} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\& \ K \cap C_j \neq \phi \quad \forall j = 1, 2, \dots, m.$$

Xây dựng lưới Petri – suy rộng dạng SM:

$$N = (P, T, pre, post, M_0), \text{ trong đó:}$$

pre: $P \times \{1\} \times T \to \mathbb{N}$; post: $T \times P_1 \times P \to \mathbb{N}$ $(P_1 = P \cup \{1\})$

Các phần tử C_j được ký hiệu là $\{y_{1j}, y_{2j}, y_{3j}\}$.

pre: $P \times P_1 \times T \to \mathbb{N}$ post: $T \times P_1 \times P \to \mathbb{N}$ $(P_1 = P \cup \{1\})$

Các phần tử của C_j được ký hiệu bởi y_{1j}, y_{2j}, y_{3j}

$P := \{u_{0i}, u_i, \overline{u_i} \mid 0 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{C_i \mid 0 \leqslant i \leqslant m+1\}$

$\cup \{y_{1j}, y_{2j}, y_{3j} \mid j = 1, \dots, m\} \cup \{\overline{y_{1j}}, \overline{y_{2j}}, \overline{y_{3j}} \mid j = 1, \dots, m\}$

$\cup \{y'_{1j}, y'_{2j}, y'_{3j} \mid j = 1, 2, \dots, m\}$

$\cup \{y'_{1j2j}, y'_{1j3j}, y'_{2j3j} \mid j = 1, \dots, m\} \cup \{y'_{1j2j3j} \mid j = 1, \dots, m\}$

$T := \{t_{0i}, \overline{t_{0i}} \mid v \leqslant i \leqslant n\} \cup \{t_{ij}, \overline{t_{ij}} \mid i = 1, 2, 3;\ j = 1, \dots, m\}$

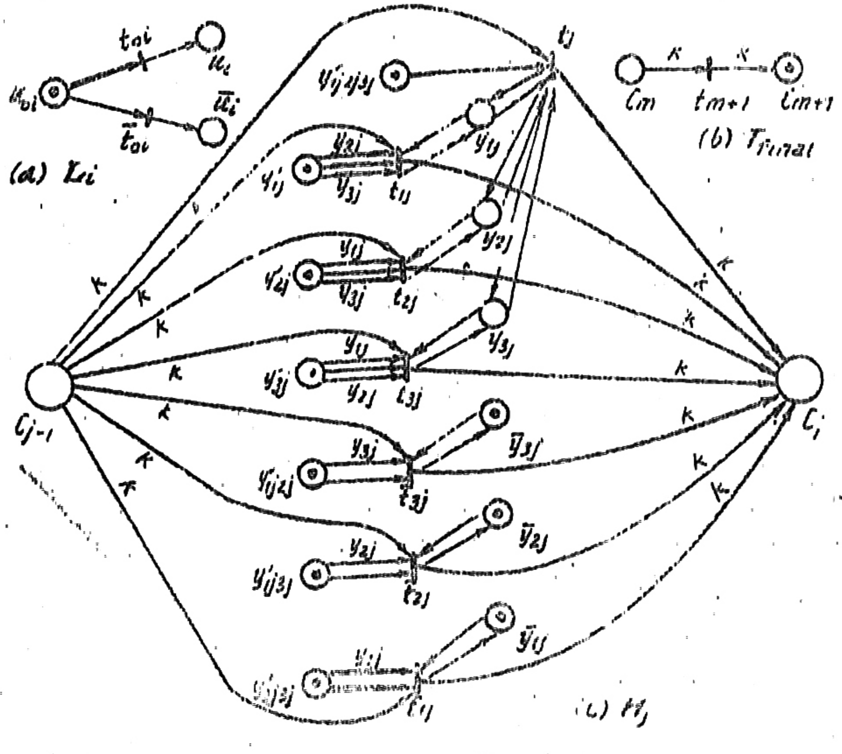
$\cup \{t_j \mid 1 \leqslant j \leqslant m\} \cup \{t_{m+1}\}$

$M_0: M_0(u_i) = M_0(\overline{u_i}) = 0 \ \forall i = 1, \dots, n;\ M_0(u_{0i}) = 1 \ \forall i = 1, \dots, n;$

$M_0(C_0) = k;\ M_0(C_j) = 0 \ \forall j = 1, \dots, m;\ M_0(C_{m+1}) = 1;$

$M_0(y'_{1j}) = M_0(y'_{2j}) = M_0(y'_{3j}) = M_0(y'_{1j2j}) = M_0(y'_{1j3j}) = M_0(y'_{2j3j}) = 1 \ \forall j = 1, \dots, m;$

$M_0(\overline{y_{1j}}) = M_0(\overline{y_{2j}}) = M_0(\overline{y_{3j}}) = 1 \ \forall j = 1, \dots, m.$



Hình 3—Các lưới con

khi đó có ít nhất 1 trong 7 thanh chuyển t_{1j}, $\bar{t}_{1j}$, t_{2j}, $\bar{t}_{2j}'$, t_{3j}, $\bar{t}_{3j}$, t_j có thể chảy. Lưới Petri — suy rộng được mô tả như trên là một lưới Petri—suy rộng dạng SM thuộc lớp P_{SM}^{once}

Theo cách xây dựng trên, chúng ta dễ dàng thấy rằng: Q là thỏa được $\Leftrightarrow \exists M \in R_N(M_o)$ với $M(C_m) = k$ kích động đạt được từ M_o. Thanh chuyển t_m trong sơ đồ T_{final} chỉ có thể chảy duy nhất 1 lần khi $M(C_m) = k$ kích động và khi đó $M(C_{m+1}) = (k+1)$ kích động. Do đó, Q thỏa được khi và chỉ khi $\exists M \in R_N(M_o)$ với $M(C_{m+1}) = (k+1)$ kích động.

$\Leftrightarrow$ N không k — bị chặn. (QED).

Sơ đồ của lưới N (xem H. 3).

Nhận ngày 18-12-1987

TÀI LIỆU DẪN

1. R. Valk, Self modifying nets, Institut fur Informatik, Universitat Hamburg, Berich IFI-HH-B-34/77.

2. T. Araki, K. Taniguchi, T. Kasami, « On NP—complete problems for bounded Petri nets », Conf. Record of Sympo. on LA (in Japanese) (July 1975).

3. P. Stark, Petri-netze, Akademie-verlag 1980.

4. W. Reisig, Petri-nets, Springer—Verlag 1983.

5. Karp and Miller, Parallel program schemata, JCSS3 (69) 2, p. 147—195.

6. M. Hack, Decision problems for Petri-nets and vector addition systems, MAC Techn Mem. 59, MIT, 1975.

7. G. Grabowski, Lineare Methoden inder Theorie der vektoradditions systeme, preprint 1980.

8. H. D. Burkhard, Two pumping Lemmas for Petri-nets, EIK 17 (1981) 7, 349—362.

9. Horst Müller, On the Reachability prob. for Persistent vector Remplacement Systems Computing Suppl. 3, 89—104 (1981).

ABSTRACT

In this paper we show that the k-bounded problem for self—modifying-nets in P_{SM}^{once} is NP-complete.

PHƯƠNG PHÁP PHÂN RÃ...

(tiếp theo trang 7)

3. J. B. Rosen, Parametric global minimization for large scale problems, Math. Oper. Res. (to appear).

4. Hoàng Tụy, Concave minimization under linear constraints with Special structure. Optimization 16 (1985), N°3. 335—352.

5. L.S. Lasdon, Optimization theory for large systems, London, 1970.

6. Đ.B. Iudin và E.G. Golstein, Qui hoạch tuyến tính, Maskva 1963 (tiếng Nga).

7. Hoàng Tụy, Global minimization of a difference of two convex functions, Mathematical programming study 30, 1987.

ABSTRACT

THE DECOMPOSITION METHOD FOR CONCAVE PROGRAMMING

In this paper a decomposition method is presented for solving a class of concave minimization problems with special structure. In each of these problems, the total number of variables may be fairly large, but only relatively few variables are actually responsible for the nonlinearity of the objective function.