TẠP CHÍ KHOA HỌC TÍNH TOÁN VÀ ĐIỀU KHIỂN TẬP IV (1988), SỐ 2 (1-7)

PHƯƠNG PHÁP PHÂN RÃ GIẢI QUI HOẠCH LÕM

BÙI THẾ TÂM và TRẦN TÚC

Xét bài toán qui hoạch lõm

$$f(y) + (c,x) \to \min \quad (1)$$

$$Fy + Ax = b \quad (2)$$

$$y \in S,\ x \geqslant 0, \quad (3)$$

trong đó $f(y)$ là một hàm lõm trên S, F là ma trận cơ $m \times s$, A là ma trận cỡ $m \times n$ và có hạng bằng m; $y \in E^s$, $c, x \in E^n$; $b \in E^m$ và S là đa diện lồi. Trong các bài toán thực tế S thường có dạng $S = \{y : 0 \leqslant y \leqslant d\}$ với $d \in E^s$.. Bài toán (1) – (3) có thể có số lượng biến rất lớn nhưng chỉ có một số tương đối ít biến tham gia trong thành phần phi tuyến của hàm mục tiêu.

Nhiều bài toán thực tế dẫn đến bài toán trên, chẳng hạn chi phí để xây dựng các nhà máy mới hay công trình mới là một hàm lõm của công suất nhà máy hoặc hàm với phụ phí cố định dạng

$$f_j(y_j) = \begin{cases} c_j^1 + c_j^2 y_j & \text{nếu } y_j > 0 \\ 0 & \text{nếu } y_j = 0 \end{cases}$$

trong đó $c_j^1 > 0$.

Trong những năm gần đây nhiều thuật toán đã được xây dựng để tìm cực tiểu hàm lõm vật các ràng buộc tuyến tính. Các phương pháp trong [1], [2] đã được dùng để giải có hiệu quả các bài toán qui hoạch lõm có số chiều dưới 12 trên các máy vi tính.

Song trong thực tế thường gặp các bài toán có số chiều rất lớn nhưng chỉ có một số ít là biến lõm, còn đại đa số là các biến tuyến tính. Để giải bài toán này ta cần đưa về việc giải một bài toán qui hoạch lõm cỡ không lớn lắm và một dãy các bài toán qui hoạch tuyến tính cỡ lớn. Bằng giải pháp này có thể giải được dễ dàng trên các máy vi tính những bài toán dạng (1) – (3) cỡ lớn (vài trăm biến).

Rosen [3] là người đầu tiên đề xuất quan điểm như vậy đối với một lớp bài toán cỡ lớn tìm cực tiểu hàm lõm với giả thiết hàm mục tiêu là lõm toàn phương và tập ràng buộc là đa diện, Rosen đã đề xuất phương pháp phân rã tham số. Trong [4] tác giả xây dựng phương pháp giải bài toán (1) – (3), phần tuyến tính của hàm mục tiêu (1) được đưa xuống ràng buộc và ở mỗi bước lặp giải bài toán phụ qui hoạch tuyến tính mà ma trận ràng buộc ngoài A còn thêm một ràng buộc bổ sung.

Trong bài này sẽ cải tiến lược đồ phân rã của Benders trình bày trong [5] để giải bài toán (1) – (3). Việc cải tiến nhằm mục đích để bài toán chính trong thuật toán là bài toán qui hoạch lõm với các ràng buộc tuyến tính và chỉ ra ba cách xác định các siêu phẳng cắt tiện dùng khi giải các bài toán thực tế. Phương pháp trong bài xử lý bài toán (1) – (3) một cách trực tiếp và tự nhiên, nó giữ nguyên cấu trúc của ma trận A trong các bài toán phụ ở mỗi bước. Điều đó đặc biệt có lợi khi A có cấu trúc đường chéo khối hoặc trong trường hợp bài toán (1)–(3) là bài toán sản xuất – vận tải thì A là ma trận của bài toán vận tải gồm các phần tử 0 và 1.

1. Cơ sở lý luận

Ta nhận thấy rằng với mỗi véctơ y cố định bài toán (1) – (3) là tuyến tính đối với x. Một cách tự nhiên ta chỉ cần xét những y mà tồn tại x thỏa mãn các ràng buộc tuyến tính, tức là xét tập hợp

$$R = \{ y \in S \mid \exists x : Ax = b - Fy , x \geq 0 \} . \tag{4}$$

Véc tơ $y \in R$ gọi là vec tơ chấp nhận được của bài toán (1) – (3). Theo bổ đề Farkas với mỗi $y \in S$ cố định hệ $\{ Ax = b - Fy , x \geq 0 \}$ có nghiệm khi và chỉ khi

$$(b - Fy , u) \leq 0 \tag{5}$$

với mọi $u \in C = \{ u : A' u \leq 0 \}$. Giả sử các véctơ cạnh của nón C là u^j, $j \in J$, J là tập chỉ số gồm hữu hạn phần tử. Khi đó với mọi $u \in C$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$u = \sum_{j \in J} \lambda_j u^j , \lambda_j \geq 0.$$

Thế biểu thức này vào (5) ta được

$$\sum_{j \in J} \lambda_j (b - Fy , u^j) \leq 0$$

với mọi $\lambda_j \geq 0$, $j \in J$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$(b - Fy , u^j) \leq 0, \forall j \in J .$$

Từ đó ta có biểu diễn tường minh của tập R

$$R = \{ y \mid y \in S , (b - Fy , u^j) \leq 0 , j \in J \} . \tag{6}$$

Nếu $R = \phi$ thì bài toán (1) – (3) không có phương án chấp nhận được. Giả sử R không rỗng, ta viết lại bài toán (1) – (3) dưới dạng

$$\min_{y \in R} \{ f(y) + \min \{ (c,x) \mid Ay = b - Fy , x \geq 0 \} \} . \tag{7}$$

Xét cặp bài toán đối ngẫu

$$\min \{ (c,x) \mid Ax = b - Fy, x \geq 0 \} \tag{8}$$

$$\max \{ (b - Fy , u) \mid A' u \leq c \} . \tag{9}$$

Kí hiệu $\tilde{D}$ là tập phương án của bài toán (9) và giả sử nó không rỗng. Giả thiết này có nghĩa rằng với mỗi y cố định tập ràng buộc của bài toán (8) là rỗng hoặc hàm mục tiêu bài toán (8) bị chặn dưới trên miền ràng buộc nếu nó không rỗng. Giữa hai bài toán có hệ thức đối ngẫu

$$\min_{x \in D(y)} (c,x) = \max_{u \in \tilde{D}} (b - Fy , u) , \tag{10}$$

trong đó D (y) là tập phương án của bài toán (8). Hệ thức này có nghĩa rằng nếu cả hai bài toán đều có phương án chấp nhận được thì chúng có lời giải tối ưu hữu hạn và trị hàm mục tiêu bằng nhau.

Thế (10) vào (7) ta dẫn bài toán (1) – (3) về dạng

$$\min_{y \in R} \{ f (y) + \max_{u \in \tilde{D}} (b - Fy , u) \} \tag{11}$$

Do $\tilde{D} \neq \phi$ cực đại trong (11) đạt được tại một điểm cực biên của $\tilde{D}$ hoặc hàm mục tiêu $(b - Fy, u) \rightarrow +\infty$ theo một tia vô hạn của $\tilde{D}$. Vì bài toán (11) là bài toán min nên nó tương đương với dạng

$$\min_{y \in R} \{ f(y) + \max_{i \in I} (b - Fy , u^i) \} , \tag{12}$$

trong đó u^i, $i \in I$ là các đỉnh của $\tilde{D}$. Chú ý rằng các vecto u^j, $j \in J$ ở trên chính là phương của các cạnh của nón các phương vô hạn của $\tilde{D}$. Từ đó suy ra bài toán (12) tương đương với bài toán sau:

$$\left. \begin{array}{l} f (y) + z \rightarrow \min \\ (b - Fy , u^i) \leq z , i \in I \\ (b - Fy , u^j) \leq 0 , j \in J \\ y \in S . \end{array} \right\} \tag{13}$$

Bài toán này là bài toán quy hoạch lõm của các biến $(y, z) \in E^{S+1}$ với các ràng buộc tuyến tính.

Ta có nhận xét sau: từ giả thiết $\widetilde{D} \neq \phi$ và hạng của ma trận A bằng m suy ra hàm mục tiêu của bài toán (13) bị chặn dưới trên miền ràng buộc. Thật vậy, do hạng A bằng m nên tồn tại đỉnh $\overline{u} \in \widetilde{D}$. Vì vậy trong số các ràng buộc của bài toán (13) có mặt ràng buộc

$$(b - Fy, \overline{u}) \leqslant z.$$

Với mọi phương án chấp nhận được (y,z) của bài toán (13) ta đều có

$$f(y) + z \geqslant f(y) + (b - Fy, \overline{u}) \geqslant \min_{y \in S} \{ f(y) + (b - Fy, \overline{u}) \}.$$

Do S compac, f(y) liên tục nên vế phải là một số hữu hạn, vậy $f(y) + z$ bị chặn dưới trên miền ràng buộc của bài toán (13).

Từ nhận xét đó ta có thể xem biến z trong bài toán (13) bị chặn trên và dưới $\underline{z} \leqslant z \leqslant \overline{z}$. Trong một số bài toán cụ thể các hằng số $\underline{z}$ và $\overline{z}$ dễ dàng xác định được. Vậy bài toán (13) tương đương với bài toán

$$f(y) + z \rightarrow \min \tag{14}$$

$$(b - Fy, u^i) \leqslant z, \ i \in I \tag{15}$$

$$(b - Fy, u^j) \leqslant 0, \ j \in J \tag{16}$$

$$y \in S, \ z \in [\underline{z}, \overline{z}] \tag{17}$$

hay

$$\begin{gathered} f(y) + z \rightarrow \min \\ (F' u^i, y) + z \geqslant (b, u^i), \ i \in I \\ (F' u^j, y) \geqslant (b, u^j), \ j \in J \\ y \in S, \ z \in [\underline{z}, \overline{z}] \end{gathered}$$

Gọi G là tập hợp xác định bởi các ràng buộc (15) – (17). Giả sử (y^*, z^*) là nghiệm của bài toán (14) – (17) và x^* là nghiệm của bài toán

$$\min \{ (c, x) \mid Ax = b - Fy^*, \ x \geqslant 0 \}.$$

Khi đó (y^*, x^*) sẽ là nghiệm của bài toán (1) – (3) với trị hàm mục tiêu là, $f(y^*) + (c, x^*)$.

Để giải bài toán (14) – (17) ta sẽ dùng phương pháp xấp xỉ ngoài trình bày trong [1], tức là tại mỗi bước lặp ta sẽ đưa dần các ràng buộc (15), (16). Tại mỗi bước lặp ta cần giải bài toán qui hoạch lõm

$$\left. \begin{gathered} f(y) + z \rightarrow \min \\ (B - Fy, u^i) \leqslant z, \ i \in I_1 \\ (b - Fy, u^j) \leqslant 0, \ j \in J_1 \\ y \in S, \ z \in [\underline{z}, \overline{z}], \end{gathered} \right\} \tag{18}$$

trong đó $I_1 \subset I$, $J_1 \subset J$. Gọi G' là tập phương án của bài toán (18), khi đó $G' \supset G$. Nếu $G' \neq \phi$ thì nó có lời giải tối ưu $(\overline{y}, \overline{z})$.

Để kiểm tra $(\overline{y}, \overline{z})$ có phải là phương án tối ưu của bài toán (14) – (17) hay không và xác định các ràng buộc cần bổ sung vào bài toán (18) ta giải bài toán qui hoạch tuyến tính phụ

$$\max \{ (b - F\overline{y}, u) \mid A'u \leqslant c \} \tag{19}$$

Do $\widetilde{D}$ không rỗng nên khi giải bài toán (19) có hai khả năng có thể xảy ra:

a) Bài toán (19) có lời giải tối ưu hữu hạn $\overline{u}$.

Nếu $(b - F\overline{y}, \overline{u}) = \max \{ (b - F\overline{y}, u) \mid u \in \widetilde{D} \} \leqslant \overline{z}$ thì $(\overline{y}, \overline{z})$ thỏa mãn hệ (15) – (17), do đó nó là lời giải tối ưu của bài toán (14) – (17), bài toán (14) – (17) đã được giải.

Nếu $(b - F\overline{y}, \overline{u}) > \overline{z}$ thì ta cần bổ sung vào các ràng buộc của bài toán (18) một ràng buộc mới

$$(b - Fy, \overline{u}) \leqslant z. \tag{20}$$

Ràng buộc này là ràng buộc của bài toán (14) — (17) mà điểm $(\bar{y}, \bar{z})$ vi phạm nhiều nhất.

b) Hàm mục tiêu bài toán phụ (19) không bị chặn trên, khi đó ta tìm được một tia vô hạn

$$u = \bar{u} + \lambda\bar{\omega},\ \lambda \geqslant 0, \tag{21}$$

trong đó $\bar{u}$ là đỉnh của $\tilde{D}$, $\bar{\omega}$ là phương vô hạn của $\tilde{D}$. Do $(b - F\bar{y}, \bar{u} + \lambda\bar{\omega}) \to +\infty$ khi $\lambda \to +\infty$ nên $(b - F\bar{y}, \bar{\omega}) > 0$. Như vậy phương vô hạn $\bar{\omega}$ của $\tilde{D}$ vi phạm ràng buộc (16). Do đó ta cần bổ sung vào các ràng buộc của bài toán (18) ràng buộc mới

$$(b - Fy, \bar{\omega}) \leqslant 0. \tag{22}$$

Chú ý rằng nếu $\bar{u}$ trong (21) xảy ra trường hợp $(b - F\bar{y}, \bar{u}) > \bar{z}$ thì ta cũng bổ sung ràng buộc (20) vào bài toán (18).

Như vậy vấn đề then chốt của mỗi một bước lặp là cần xác định phương án cực biên tối ưu $\bar{u}$ của bài toán (19) (tức là bài toán (9) với $y = \bar{y}$) hoặc xác định phương vô hạn $\bar{\omega}$ của $\tilde{D}$ khi hàm mục tiêu của bài toán (19) không bị chặn trên, sau đó ta xây dựng các lát cắt (20) hoặc (22). Để làm điều đó ta có thể chọn một trong các phương pháp sau khi giải các bài toán thực tế:

— Dùng phương pháp đơn hình để giải bài toán (9) với $y = \bar{y}$. Phương pháp này tiện dùng khi ma trận A có số hàng nhiều hơn nhiều so với số cột.

— Dùng phương pháp đơn hình đối ngẫu cải biên để giải bài toán (8) với $y = \bar{y}$. Phương pháp này tiện dùng khi ma trận A có số hàng ít hơn so với số cột. Và đã biết trước một phương án đối ngẫu chấp nhận được

— Dùng phương pháp đơn hình cải biên để giải bài toán (8) với $y = \bar{y}$. Phương pháp này tiện dùng khi ma trận A có số hàng ít hơn nhiều so với số cột.

Dưới đây chúng ta sẽ nghiên cứu phương pháp phân rã tương ứng với ba phương pháp xác định $\bar{u}$ và $\bar{\omega}$ nêu trên.

2. Thuật toán phân rã

Sau đây là thuật toán phân rã với việc sử dụng phương pháp đơn hình để giải bài toán đối ngẫu (9) với $y = \bar{y}$.

Bước chuẩn bị. Gọi $G_0 \subset E^{s+1}$ là đa diện lồi xác định bởi các ràng buộc (17) và V_0 là tập hợp các đỉnh của G. Đầu tiên ta giải bài toán quy hoạch lõm (14) và (17), tức là

$$\min\{f(y) + z \mid (y,z) \in V_0\}$$

và lời giải của bài toán này là (y^0, z^0). Ở bước lặp này các tập I_0 và J_0 là rỗng.

Bước lặp k, k = 1,2,...

1. Giải bài toán qui hoạch lõm

$$\left.\begin{aligned} & f(y) + z \to \min \\ & (b - Fy, u^i) \leqslant z,\ i \in I_k \\ & (b - Fy, u^j) \leqslant 0,\ j \in J_k \\ & (y, z) \in G_0 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

trong đó $I_k \subset I$, $J_k \subset J$. Giả sử G_k là tập phương án chấp nhận được của bài toán (23) và ta đã biết tập đỉnh V_k của nó. Vì cực tiểu hàm lõm trên đa diện lồi đạt tại các đỉnh nên bài toán (23) tương đương với bài toán

$$\min\{f(y) + z \mid (y, z) \in V_k\}.$$

Giả sử lời giải của bài toán này là (y^k, z^k).

2. Giải bài toán qui hoạch tuyến tính phụ dạng (9) với $y = y^k$:

$$\max\{(b - Fy^k, u) \mid A'u \leqslant c\}. \tag{24}$$

quá trình giải bài toán (24) bằng thuật toán đơn hình (dạng bình thường hay dạng đơn hình dùng ma trận nghịch đảo cơ sở) có thể kết thúc bởi một trong hai khả năng:

a) Lời giải tối ưu của bài toán (24) đạt tại một đỉnh u^k của $\tilde{D}$.

Nếu $(b - Fy^k, u^k) \leqslant z^k$ thì (y^k, z^k) thỏa mãn (15) — (17), do đó nó là lời giải tối ưu của (14) — (17). Khi giải bài toán (24) bằng phương pháp đơn hình cải biên, đồng thời với việc nhận phương án tối ưu u^k ta cũng nhận được lời giải tối ưu x^k của bài toán (8) với $y = y^k$. Khi đó (y^k, x^k) sẽ lập nên phương án tối ưu của bài toán (1) – (3) với trị hàm mục tiêu là $f(y^k) + (c, x^k)$. Quá trình tính toán kết thúc.

Nếu $(b - Fy^k, u^k) > z^k$ thì ta cần bổ sung vào các ràng buộc của bài toán (23) một ràng buộc mới

$$(b - Fy, u^k) \leqslant z \tag{25}$$

và chuyển sang điểm 3).

b) Hàm mục tiêu bài toán (24) tiến ra vô hạn trên tia $u = u^k + \lambda\omega^k$, $\lambda \geqslant 0$, trong đó u^k là đỉnh của $\widetilde{D}$, ω^k là phương của cạnh vô hạn của $\widetilde{D}$. Xây dựng ràng buộc mới

$$(b - Fy, \omega^k) \leqslant 0 \tag{26}$$

để bổ sung vào các ràng buộc của bài toán (23) và chuyển sang điểm 3).

3. Gọi G_{k+1} là tập G_k được bổ sung thêm một ràng buộc mới (25) hoặc (26). Khi đã biết tập đỉnh V_k và ràng buộc mới cần bổ sung vào G_k, từ thủ tục sinh đỉnh trong [1] ta dễ dàng tính được tập đỉnh mới V_{k+1} của G_{k+1}. Ta quay lên điểm 1).

Vì các tập I và J là hữu hạn nên thuật toán trên kết thúc sau một số hữu hạn bước lặp.

3. Dùng phương pháp đơn hình đối ngẫu cải biên để giải bài toán (8)

Trong phần này ta sẽ nêu cách xác định các véctơ u^k và ω^k trong (25), (26) bằng cách dùng phương pháp đơn hình đối ngẫu cải biên để giải bài toán

$$\min\{(c, x) \mid Ax = b - Fy^k,\ x \geqslant 0\}. \tag{27}$$

Đối ngẫu của bài toán này là bài toán (24). Ký hiệu $b' = b - Fy^k$.

Giả sử ta biết một hệ B gồm m vectơ cột độc lập tuyến tính của ma trận A là a_j, $j \in K$. Nếu B là một cơ sở đối ngẫu chấp nhận được thì ta có thể lấy nó làm cơ sở xuất phát cho phương pháp đơn hình đối ngẫu. Nếu B không phải cơ sở đối ngẫu chấp nhận được thì ta xét bài toán phụ sau:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min\\
&x_0 + \sum_{j \overline{\in} K} x_j = M\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0,\quad i = 1, \dots, m\\
&x_j \geqslant 0,\qquad j = 1, \dots, n
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

trong đó M là số dương đủ lớn. Đối ngẫu với bài toán này là bài toán

$$\left.\begin{aligned}
&Mu_0 \to \max\\
&u_0 \leqslant 0\\
&\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \leqslant c_j,\ j \in K\\
&u_0 + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \leqslant c_j,\ j \overline{\in} K
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Gọi $\widetilde{D}$ là tập phương án chấp nhận được của bài toán (29)

Rõ ràng $B_1 = [\bar{a}_0, \bar{a}_j\ (j \in K)]$ là một hệ gồm m+1 véctơ độc lập tuyến tính của bài toán (28) với $\bar{a}_j$ là véctơ cột thứ j của bài toán (28), đồng thời

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

Do hệ số c_0 của bài toán (28) bằng không nên các ước lượng của các vectơ cột của bài toán (27) theo cơ sở B và của bài toán (28) theo cơ sở B_1 là trùng nhau. Thực hiện một phép lặp của phương pháp đơn hình với cột quay là vectơ $\bar{a}_k$ ứng với

$$\Delta_k^1 = \max\{\Delta_j^1 : \Delta_j^1 > 0\}$$

và dòng quay ứng với vectơ cơ sở $\overline{a}_0$. Ta nhận được ma trận cơ sở mới là

$$B_2 = [\overline{a}_k, \overline{a}_j (j \in k)]$$

Ký hiệu các ước lượng ứng với cơ sở B_2 là Δ_j^2.

Khi đó ta có $\Delta_j^2 \leqslant 0$ với mọi j, tức là B là một cơ sở đối ngẫu chấp nhận được. Thật vậy, $\Delta_o^2 = -\Delta_k^1 < 0$, với mọi j không phải cơ sở và $j \neq k$ ta có $\Delta_j^2 = \Delta_j^1 - \Delta_k \leqslant 0$.

Ta nhận thấy bài toán (29) luôn có phương án tối ưu vì hàm mục tiêu bị chặn trên $Mu_0 \leqslant 0$. Từ giả thiết $\tilde{D} \neq \varnothing$ suy ra tồn tại $u \in \tilde{D}$, khi đó $(o, \overline{u}) \in \tilde{D}_M$. Từ đó ta thấy rằng phương án tối ưu của (29) phải thỏa mãn $u_0 = 0$.

Do vectơ $\overline{a}_0$ của bài toán (28) là độc lập tuyến tính với các vectơ cột thuộc A và $u_0=0$ là ràng buộc chặt đối với phương án tối ưu nên cơ sở tối ưu của bài toán (28) khi giải bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu cải biên nhất thiết phải chứa a_0. Vì vậy xuất phát từ cơ sở đối ngẫu chấp nhận được B_2 dùng phương pháp đơn hình đối ngẫu cải biên để giải bài toán (28) sau một số hữu hạn bước phải đi tới cơ sở tối ưu chứa a_0. Khi đó chỉ cần xóa dòng a_0 và cột e_0 trong bảng đơn hình chính và xóa cột $\overline{a}_0$ trong bảng phụ, đồng thời trên cột phương án ghi hệ số phân tích của b' theo cơ sở đang xét ta sẽ được bảng đơn hình ứng với một cơ sở đối ngẫu chấp nhận được của bài toán (27). Thật vậy, giả sử cơ sở tối ưu của bài toán (28) là

$$\overline{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \overline{B} \end{bmatrix} = [\overline{a}_0, \overline{a}_j (j \in K')],$$

trong đó $\overline{B} = [a_j, j \in K']$ là các vectơ cột j của bài toán (27), $\alpha = [\alpha_j, j \in K']$, α_j là thành phần thứ nhất của a_j. Từ $|\overline{B}_1| \neq 0$ suy ra $|B| \neq 0$ và

$$\overline{B}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha\overline{B}^{-1} \\ 0 & \overline{B}^{-1} \end{bmatrix} \tag{30}$$

Do đó $\overline{B}$ là một cơ sở của bài toán (27). Vì $c_0 = 0$ nên ước lượng Δ_j của bài toán (27) tính theo cơ sở $\overline{B}$ trùng với ước lượng Δ_j của bài toán (28) tính theo sơ sở $\overline{B}_1$, do đó $\overline{B}$ là một cơ sở đối ngẫu chấp nhận được của (27). Từ (30) để có bảng đơn hình tương ứng chỉ cần xóa dòng $\overline{a}_0$ và cột e_0 trong bảng đơn hình và ghi vectơ $\overline{B}^{-1}$ vào cột phương án.

Các bảng đơn hình từ bây giờ trở đi được coi như dùng phương pháp đơn hình đối ngẫu cải biên để giải bài toán (27). Quá trình giải tiếp tục có thể kết thúc bởi một trong hai khả năng:

— Ta nhận được phương án tối ưu của (27) là x^k. Nhờ phương pháp đơn hình đối ngẫu cải biên ta cũng đồng thời thu được phương án tối ưu u^k của bài toán đối ngẫu (24) và $(c, x^k) = (b - Fy^k, u^k)$. Vectơ u^k nằm ở dòng $m+1$ của bảng đơn hình.

— Phát hiện tập phương án của bài toán (27) là trống và tìm được một tia ω^k của miền $\tilde{D}$ mà theo đó hàm mục tiêu của bài toán đối ngẫu (24) tiến ra vô hạn. Giả sử bảng đơn hình ở bước này có cột giả phương án là x_j, $j \in K''$, phần tử thứ i của khai triển vectơ a_j $(j \in K'')$ theo cơ sở là z_{ij}, và dòng thứ i của ma trận nghịch đảo cơ sở là $e^{(i)}$. Theo thuật toán đơn hình đối ngẫu trường hợp tập phương án của bài toán (27) là trống tương ứng với trường hợp tồn tại thành phần $x_s < 0$, $s \in K''$ mà $z_{sj} \geqslant 0$ với mọi $j \in K''$. Khi đó phương vô hạn ω^k chính là dòng thứ s của ma trận cơ sở nghịch đảo lấy với dấu ngược lại $\omega^k = -e^{(s)}$. Phương án cực biên u^k của $\tilde{D}$ ứng với bảng đơn hình này lấy ở dòng $m+1$ của bảng đơn hình. Vậy tia vô hạn chính là

$$u = u^k + \lambda(-e^{(s)}), \ \lambda \geqslant 0.$$

Nhờ cách xác định u^k và ω^k ở trên ta có thể xây dựng được các lát cắt (25), (26) tương ứng.

Ta có nhận xét: nếu các ràng buộc của bài toán (27) ở dạng bất đẳng thức và vectơ $c \geqslant 0$ (trường hợp này thường gặp khi giải các bài toán thực tế) thì ta có ngay một cơ sở đối ngẫu chấp nhận được xuất phát và ta không cần giải bài toán phụ (28). Hoặc trong trường hợp tất cả các biến của bài toán (27) đều có ràng buộc hai phía, chẳng hạn $0 \leq x_j \leq d_j$, $j=1, ..., n$, thì một hệ bất kỳ m vectơ cột độc lập tuyến tính của A có thể lấy làm cơ sở xuất phát cho phương pháp đơn hình đối ngẫu (xem [6]).

4. Dùng phương pháp đơn hình cải biên để giải bài toán (8)

Cũng như hai phần trên, ở đây sẽ chỉ ra cách xác định các vectơ u^k và ω^k để xây dựng các lát cắt (25) và (26). Viết lại bài toán (27)

$$\min \{ (c, x) \mid Ax = b', x \geq 0 \}.$$

Với giả thiết $\tilde{D}$ không rỗng hai trường hợp sau có thể xảy ra:

a) Nếu đã biết một phương án cực biên của (27) thì quá trình giải nhất thiết phải đi tới phương án cực biên tối ưu của nó, nghĩa là luôn tìm được u^k để xây dựng lát cắt (25) (vectơ u^k nằm ở dòng m+1 của bảng đơn hình).

b) Chưa biết phương án cực biên của (27). Trong trường hợp này theo thuật toán ta dùng thủ thuật biến giả để tìm phương án cực biên xuất phát bắt đầu từ việc xét bài toán phụ

$$\left.\begin{array}{c} P = \sum_{i=1}^{m} x_i^g \to \min \\ Ax + x^g = b' \\ x, x^g \geq 0 \end{array}\right\} \tag{31}$$

trong đó $x^g = (x_1^g, ..., x_m^g)$ là các biến giả.

Ta đã biết (31) luôn có phương án tối ưu. Nếu phương án cực biên tối ưu của (31) có tương ứng $P_{min} = 0$, tức là $x_i^g = 0$ với mọi i thì x tương ứng là phương án cực biên của (27). Đến đây tiếp tục quá trình tính toán theo a).

Nếu phương án cực biên tối ưu $(\bar{x}, \bar{x}^g)$ của (31) có tương ứng $P_{min} > 0$, nghĩa là ít nhất có một biến giả cơ sở $\bar{x}_i^g > 0$ thì tập phương án của (27) là rỗng, nhưng vì $\tilde{D} \neq \phi$ và hạng A=m nên phải tồn tại phương một cạnh vô hạn kề với một điểm cực biên của $\tilde{D}$ mà trên đó hàm mục tiêu của (24) tăng. Ta có thể xác định một phương như vậy xuất phát từ $(\bar{x}, \bar{x}^g)$. Trước hết, ở mọi bảng trên mỗi hàng ứng với biến giả cơ sở ít nhất phải có một hệ số phân tích khác không của một vectơ phi cơ sở a_j (j=1, ..., n) nào đó. Lần lượt đưa các vectơ này vào cơ sở và loại hết các vectơ biến giả ra khỏi cơ sở, ta sẽ thu được một cơ sở của bài toán (27). Sau đó dùng thủ thuật tìm cơ sở đối ngẫu xuất phát trong phương pháp đơn hình đối ngẫu của mục 3 và qua một số hữu hạn bước nhất thiết phải tìm được cơ sở đối ngẫu có $x_s < 0$ với s thuộc cơ sở nhưng $z_{sj} \geq 0$ với mọi j không thuộc cơ sở. Phương vô hạn cần tìm ω^k kề với điểm cực biên tương ứng của bài toán đối ngẫu chính là dòng thứ s của ma trận cơ sở nghịch đảo lấy với dấu ngược lại.

Nhận ngày 2-3-1987

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. T.V. Thiệu, B.T. Tâm, V.T. Bản, An outer approximation method for globally minimizing a convex function over a compact convex set, Acta Mathematica Vietnamica, 8(1983), N°1, 21–40.

2. B.T. Tâm, V.T. Bản, Cực tiểu hàm lõm với ràng buộc tuyến tính, Economica i matematitreskie metodư, 1985, số 4, 709 – 714 (tiếng Nga).

(xem tiếp trang 12)