TẠP CHÍ KHOA HỌC TÍNH TOÁN VÀ ĐIỀU KHIỂN TẬP IV (1988) SỐ 1 (15–17)

M–PHỦ TỐI TIỂU VÀ CÁC HỆ SPERNER VỚI VẤN ĐỀ TÌM KIẾM KHÓA CỦA QUAN HỆ CƠ SỞ DỮ LIỆU

PHẠM THẾ QUẾ

1. MỞ ĐẦU

Trong bài này chúng tôi sẽ nghiên cứu cấu trúc của quan hệ cơ sở dữ liệu khi cho trước tập khóa của nó. Đặc biệt chúng tôi sẽ tổng quát hóa cấu trúc của các hệ Sperner trên một tập hữu hạn. Điều này có nghĩa là giữa hệ Sperner cho trước và tập các tập đại diện của nó có mối quan hệ ràng buộc và xác định lẫn nhau. Từ tập khóa cho trước của quan hệ cơ sở dữ liệu, chúng ta có thể xác định tập đại diện của nó và ngược lại. Tập khóa của quan hệ cơ sở dữ liệu chính là tập các tập đại diện của tập các tập đại diện của tập khóa.

2. KHÁI NIỆM VÀ ĐỊNH NGHĨA

Để tiện việc theo dõi và không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng các phần tử của một tập hữu hạn được phân biệt nhau và được sắp xếp theo chỉ số.

2.1. Cho $H = \{a_1,..., a_h\}$ là một tập hữu hạn. Tập $S = \{S_1,..., S_s\}$ được gọi là hệ Sperner đầy đủ trên tập H, nếu thỏa mãn các điều kiện sau đây:

a) $S_i \subseteq H$, $S_i \not\subseteq S_j$ với mọi $i \neq j$, $i, j \in \{1,..., s\}$

b) $$\bigcup_{i=1}^{s} S_i = H.$$

2.2 Cho **S** là hệ Sperner đầy đủ trên tập H. Ta nói rằng tập H xác định ma trận $M_S(H) = (\alpha_{ij})$ có h dòng và s cột. Các phần tử α_{ij} được định nghĩa như sau; với mọi $i \in \{1,..., h\}$,

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } a_i \in S_j \\ 0 \text{ ngược lại.} \end{cases}$$

Ta gọi r_i là dòng thứ i của $M_S(H)$ với mọi $i \in \{1,..., h\}$ và sử dụng ký hiệu $r_i \in M_S(H)$.

Ma trận $M_S(X)$ sẽ được coi là ma trận con của ma trận $M_S(H)$ và ký hiệu là $M_S(X) \subseteq M_S(H)$, khi và chỉ khi $X \subseteq H$.

Cho $X \subseteq H$ là tập con không rỗng, $a_j \in H$, r_j là dòng được xác định bởi a_j. Khi đó ta định nghĩa

$$M_S(H) \setminus \{r_j\} := M_S(H \setminus \{a_j\})$$

$$M_S(H) \setminus M_S(X) := M_S(H \setminus X).$$

2.3. Vectơ $C_S(X) = (\eta_1, \ldots, \eta_s)$ được gọi là vectơ đặc trưng của $M_S(X) \subseteq M_S(H)$ nếu với mọi $j \in \{1, \ldots, s\}$

$$\eta_j = \begin{cases} 0 \text{ nếu } \alpha_{ij} = 0 \text{ với mọi } i \in \{1, \ldots, h\} \\ 1 \text{ ngược lại.} \end{cases}$$

2.4. Ma trận $M_S(X) \subseteq M_S(H)$ được gọi là M−phủ tối tiểu khi và chỉ khi

a) $C_S(X) = (1, \ldots, 1)$

b) Không tồn tại $M_S(X') \subset M_S(X)$ sao cho $C_S(X') = (1, \ldots, 1)$. Nếu $M_S(X)$ chỉ thỏa mãn điều kiện (a), ta gọi $M_S(X)$ là M−phủ.

Từ định nghĩa trên, hiển nhiên $M_S(H)$ là M−phủ.

Tập $Q \subseteq H$ sẽ được gọi là tập đại diện của hệ Sperner đầy đủ $\mathbf{S}$ trên tập H (nói gọn là tập đại diện của $\mathbf{S}$), nếu $M_S(Q)$ là M−phủ tối tiểu. Ký hiệu:

$Q_H(\mathbf{S}) := \{Q \mid Q \subseteq H, \text{ là tập đại diện của } \mathbf{S}\}$

2.5 Ta gọi $M_S(y) \subseteq M_S(H)$ là Sp−đảo của $\mathbf{S}$ nếu:

a) $M_S(S_i) \not\subseteq M_S(Y)$ với mọi $i \in \{1, \ldots, s\}$

b) $\forall M_S(X) \subseteq M_S(H)$ và $M_S(Y) \subset M_S(X)$,

$\exists S_i \in \mathbf{S}: M_S(S_i) \subseteq M_S(X)$.

Ký hiệu: $D_H(\mathbf{S}) = \{D \mid D \subset H, M_S(D) \text{ là Sp−đảo của } \mathbf{S}\}$

3. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA M−PHỦ TỐI TIỂU

Định lí 3.1. Cho $\mathbf{S}$ là hệ Sperner đầy đủ trên tập H hữu hạn. Khi đó $\forall r_i \in M_S(H)$ tồn tại $M_S(Q) \subseteq M_S(H)$ sao cho $M_S(Q)$ là M − phủ tối tiểu và $r_i \in M_S(Q)$.

Chứng minh: Có hai trường hợp xảy ra

1) Nếu $C_S(\{r_i\}) = (1, \ldots, 1)$ dễ dàng suy ra điều cần chứng minh.

2) Nếu $C_S(\{r_i\}) \neq (1, \ldots, 1)$

a) Nếu $M_S(H)$ là M−phủ tối tiểu, khi đó định lý đã được chứng minh.

b) Nếu $M_S(H)$ không là M−phủ tối tiểu, tồn tại $r_j \neq r_i$ sao cho $M_S(H) \setminus \{r_j\} := M_S(H \setminus \{r_j\})$ là M−phủ.

Vì tập H là tập hữu hạn, tồn tại một số nguyên, dương k sao cho

$$M_S(H) \supset M_S(H^{(1)}) \supset \ldots \supset M_S(H^{(k)}) \supset \phi$$

$\forall t < k: M_S(H^{(t)})$ là M − phủ và $M_S(H^{(k)})$ là M − phủ tối tiểu, $r_i \in M_S(H^{(k)})$.

Hệ quả 3.1: Mọi M−phủ đều có chứa M−phủ tối tiểu.

Hệ quả 3.2 $Q_H(\mathbf{S})$ là hệ Sperner đầy đủ trên tập H.

Định lí 3.2 Cho $\mathbf{S}$ là hệ Sperner đầy đủ trên tập H hữu hạn. Cho $M_S(Q) \subseteq M_S(H)$. Khi đó $M_S(Q)$ là M phủ tối tiểu khi và chỉ khi:

a) $\forall S \in \mathbf{S}, \exists r_j \in M_S(H)$ sao cho $r_j \in M_S(Q)$, $r_j \in M_S(S)$

b) $\forall M_S(Q') \subseteq M_S(Q)$, $\exists S \in \mathbf{S}$ sao cho $\forall r_i \in M_S(Q')$ và $r_i \notin M_S(S)$

Chứng minh: Dễ dàng suy ra khẳng định trên.

Hệ quả 3.3: cho $\mathbf{S}$ và $\mathbf{Q}$ là 2 hệ Sperner đầy đủ trên H.
Khi đó $\mathbf{Q} = Q_H(\mathbf{S})$ khi và chỉ khi:

a) $\forall S \in \mathbf{S}, \forall Q \in \mathbf{Q} \Rightarrow Q \cap S \neq \phi$,

b) $\forall Q' \in \mathbf{Q}, \forall Q \subset Q' \Rightarrow \exists S \in \mathbf{S}: Q \cap S = \phi$.

Định lí 3.3. Cho $\mathbf{S}$ và $\mathbf{Q}$ là 2 hệ Sperner đầy đủ trên H.

Khi đó : $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_H(\mathbf{S}) \Leftrightarrow \mathbf{D}_H(\mathbf{S}) = \{H \setminus Q \mid Q \in \mathbf{Q}\}$.

Chứng minh : Từ định nghĩa M – phủ tối tiểu và Sp – đảo sẽ suy ra định lí.

Hệ quả 3.4 : $\mathbf{D}_H(\mathbf{S})$ là hệ Sperner đầy đủ trên tập H.

Hệ quả 3.5 $\bigcap_{D \in \mathbf{D}_H(\mathbf{S})} D = \phi$

Hệ quả 3.6 $|\mathbf{Q}_H(\mathbf{S})| = |\mathbf{D}_H(\mathbf{S})|$

Trong đó $|\mathbf{Q}_H(\mathbf{S})|$ là lực lượng của $\mathbf{Q}_H(\mathbf{S})$, $|\mathbf{D}_H(\mathbf{S})|$ là lực lượng của $\mathbf{D}_H(\mathbf{S})$.

4. ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ

Trong phần này chúng ta sẽ xác lập điều kiện cần và đủ để 2 hệ Sperner đầy đủ trên tập hữu hạn là các tập đại diện của nhau.

Định lí 4.1. Cho $\mathbf{S}$ là hệ Sperner đầy đủ trên H và $\mathbf{Q}_H(\mathbf{S})$ là tập các tập đại diện của $\mathbf{S}$. Khi đó $\mathbf{S} = \mathbf{Q}_H(\mathbf{Q}_H(\mathbf{S}))$. Nói cách khác, tập các tập đại diện của tập các tập đại diện của $\mathbf{S}$ chính là tập $\mathbf{S}$.

Chứng minh 1) dễ dàng suy ra rằng : $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{Q}_H(\mathbf{Q}_H(\mathbf{S}))$

2) Cần phải chứng minh $\mathbf{Q}_H(\mathbf{Q}_H(\mathbf{S})) \subseteq \mathbf{S}$ tức là $\forall Q' \in \mathbf{Q}_H(\mathbf{Q}_H(\mathbf{S})) \Rightarrow \exists S \in \mathbf{S} : Q' = S$.

Vì $M_{\mathbf{S}}(H - Q')$ không là M – phủ nên $C_{\mathbf{S}}(H - Q')$ có ít nhất một thành phần bằng không. Giả sử thành phần thứ k. Các phần tử trong cột thứ k của $M_{\mathbf{S}}(Q')$ đều bằng 1. Tức là trong ma trận $M_{\mathbf{S}}(H)$ tồn tại một cột $S \in \mathbf{S}$ sao cho $S = Q'$. Hiển nhiên cột này là duy nhất.

Hệ quả 4.1 : Cho $\mathbf{S}$ và $\mathbf{Q}$ là những hệ Sperner đầy đủ trên tập H hữu hạn. Điều kiện cần và đủ để $\mathbf{S}$ và $\mathbf{Q}$ là tập các tập đại diện của nhau, nếu thỏa mãn một trong 2 khẳng định sau :

1) a) $\forall S \in \mathbf{S}, \forall Q \in \mathbf{Q} \Rightarrow S \cap Q \neq \phi$

   b) $\forall Q \in \mathbf{Q}, \forall Q' \subset Q \Rightarrow \exists S \in \mathbf{S} : S \cap Q' = \phi$

2) a) $\forall S \in \mathbf{S}, \forall Q \in \mathbf{Q} \Rightarrow S \cap Q \neq \phi$

   b) $\forall S \in \mathbf{S}, \forall S' \subset S \Rightarrow \exists Q \in \mathbf{Q} : Q \cap S' = \phi$.

5. M – PHỦ TỐI TIỂU TRONG QUAN HỆ CƠ SỞ DỮ LIỆU

Cho Ω là tập các thuộc tính và $\mathbf{K}$ là tập khóa của quan hệ R trên tập Ω. Ta ký hiệu :

$$H = \bigcup_{K_i \in \mathbf{K}} K_i, \quad G = \Omega \setminus H$$

Khi đó $\mathbf{K}$ là hệ Sperner đầy đủ trên tập $H = \bigcup K_i$. Trong [4] Hồ Thuần và Lê Văn Bảo đã chứng minh rằng khóa của quan hệ R trên tập H cũng là khóa của quan hệ R' trên tập Ω.

Định lí 5.1.

a) Nếu $\mathbf{D}_H(\mathbf{K})$ là tập Sp – đảo của hệ $\mathbf{K}$ trên H khi đó $\mathbf{D}_\Omega \mathbf{K} := \{D \cup G \mid D \in \mathbf{D}_H(\mathbf{K})\}$ là Sp – đảo của hệ $\mathbf{K}$ trên Ω.

Ngược lại nếu $\mathbf{D}_\Omega(\mathbf{K})$ là tập Sp – đảo của hệ $\mathbf{K}$ trên Ω, khi đó $\mathbf{D}_H(\mathbf{K}) := \{D' \setminus G \mid D' \in \mathbf{D}_\Omega(\mathbf{K})\}$

Hệ quả 5.1 :

a) $\mathbf{Q}_\Omega(\mathbf{K}) = \mathbf{Q}_{\Omega \setminus G}(\mathbf{K})$

b) $\bigcup_{K \in \mathbf{K}} K = \Omega \setminus \bigcap_{D \in \mathbf{D}_\Omega(\mathbf{K})} D$

Tác giả xin chân thành cảm ơn giáo sư Hồ Thuần đã giành nhiều thời gian để chỉnh lý và đóng góp nhiều ý kiến quý báu cho bài báo này.

Nhận ngày 5-9-1987

(xem tiếp trang 32)