TẠP CHÍ KHOA HỌC TÍNH TOÁN VÀ ĐIỀU KHIỂN TẬP V (1989), Số 4 (17 - 23)

CÁC PHƯƠNG ÁN LẤY MẪU KIỂM TRA KINH TẾ VỚI BA QUYẾT ĐỊNH

NGUYỄN THANH TÙNG

I. MỞ ĐẦU

Trong những năm gần đây, việc xây dựng các phương án lấy mẫu kiểm tra kinh tế định tính hoặc định lượng được nhiều người quan tâm nghiên cứu, (xem chẳng hạn [1, 2, 3, 4, 6]). Hầu hết các nghiên cứu cho tới nay đều giả thiết rằng, các lô không được chấp nhận sẽ đều bị loại bỏ hay đều được đem sàng lọc. Tuy vậy, trong thực tế thường xảy ra tình huống đòi hỏi phải có cách sử lý tinh tế hơn đối với những lô bị bác bỏ căn cứ vào ước lượng chất lượng (tỉ lệ phế phẩm) hiện hành trong lô. Cần thiết áp dụng một lược đồ lấy mẫu kiểm tra xây dựng trên cơ sở ba quyết định. Phân mỗi lô vào một trong ba cấp chất lượng A, B và C; chấp nhận lô cấp A, sàng lọc lô cấp B và loại bỏ lô cấp C.

Ý niệm về việc sử dụng ba quyết định trong vấn đề xây dựng các phương án lấy mẫu kiểm tra nghiệm thu được đưa ra đầu tiên bởi Panday và Chawdhary [7]. Gần đây, Schmidt, Bennett và Case [9] đã nghiên cứu mô hình xây dựng phương án lấy mẫu kiểm tra định lượng với ba quyết định. Noon Charn Riew và Do Sun Bai [5] cũng đã đưa ra một mô hình như thế đối với việc kiểm tra định tính.

Trong bài này, chúng tôi nghiên cứu một cách tổng quát bài toán xây dựng phương án lấy mẫu kiểm tra kinh tế trong trường hợp có ba quyết định có thể chọn. Phương pháp tiếp cận thống kê Bayes của Hald [3] được sử dụng để xác định phương án tối ưu. Các giả thiết cơ bản ở đây là:

(i)- Mỗi đơn vị sản phẩm chỉ có thể là chính phẩm hay phế phẩm.

(ii)- Quá trình sản xuất là quá trình chịu sự điều khiển nhị thức với chất lượng trung bình của sản xuất thay đổi từ lô này sang lô khác theo luật phân bố có mật độ tiên nghiệm (p).

(iii)- Các chi phí là những hàm tuyến tính của chất lượng trung bình của sản xuất. Mọi chi phí đều đo được bằng cùng một đơn vị đo.

(iv)- Phương án tối ưu cần chọn là phương án làm cực tiểu tổn thất trung bình.

II- MÔ HÌNH

Giả sử, theo chu kỳ từng lô sản phẩm cùng loại, có cỡ cố định N được sản xuất ra bởi một cơ sở sản xuất. Để theo dõi cải tiến quá trình sản xuất, người sản xuất muốn kiểm tra mỗi lô bằng phương pháp lấy mẫu. Vấn đề đặt ra là cần chọn phương án kiểm tra như thế nào ?

Giả thiết rằng:

a/ Mỗi sản phẩm chỉ có thể là chính phẩm hoặc phế phẩm. Các quyết định có thể chọn liên quan tới phần còn lại của mỗi lô hàng là:

d1 : chấp nhận,

d2 : sàng lọc,

d3 : loại bỏ,

b/ Quá trình sản xuất là quá trình chịu sự điều khiển nhị thức với chất lượng trung bình (của sản xuất) không đổi trong phạm vi một lô, nhưng thay đổi từ lô này sang lô khác theo luật phân bố có mật độ tiên nghiệm (p).

c/ Chi phí để kiểm tra cũng như các tổn thất do việc chấp nhận,sàng lọc hoặc loại bỏ một sản phẩm là những hàm tuyến tính của chất lượng trung bình của sản xuất p và được lần lượt ký hiệu bởi

$$\begin{aligned} K_s(p) &= S1 + S2p \\ K_a(p) &= A1 + A2p \\ K_t(p) &= T1 + T2p \\ K_r(p) &= R1 + R2p \end{aligned} \qquad (1)$$

(xem [3], trang 12 về sự lý giải ý nghĩa các hệ số).

d/ Để phương án ba quyết định có ưu thế hơn phương án hai quyết định, ta giả thiết rằng

$$A1 < T1 < R1 \qquad (2)$$

$$A1 + A2 > T1 + T2 > R1 + R2 \qquad (3)$$

Giả thiết c) có nghĩa là $K_a(p)$ và $K_t(P)$ cắt nhau tại điểm

$$p_1 = \frac{T_1 - A_1}{A_2 - T_2}, \qquad (5)$$

$K_a(P)$ và $K_r(P)$ cắt nhau tại

$$p_2 = \frac{R_1 - A_1}{A_2 - R_2}, \qquad (6)$$

$K_t(P)$ và $K_r(P)$ cắt nhau tại

$$p_3 = R_1 - \frac{T_1}{T_2 - R_2}, \qquad (7)$$

trong đó $0 < P_1 < P_2 < P_3 < 1$.

Một phương án kiểm tra lấy mẫu một lần với ba quyết định được xác định bằng cỡ mẫu n và quy tắc quyết định δ_n chỉ rõ quyết định cần thực hiện như một hàm của kết quả kiểm tra mẫu. Phương án kiểm tra Bayes là phương án làm cực tiểu tổn thất trung bình toàn bộ lấy theo phân bố của trung bình của sản xuất.

Giả sử $\delta_n(x)$ biểu diễn quyết định của ta khi kiểm tra một mẫu cỡ n và quan sát thấy x phế phẩm. Với các giá trị khác nhau có thể có của x, tổn thất trung bình phải chịu khi sử dụng phương án (n, δ_n) kiểm tra những lô có trung bình của sản xuất p là

$$L(N, n, \delta_n/p) = (N-n)\sum_{x=0}^{n} K_{\delta_n(x)}(p)b(x,n,p) + nK_s(p) \qquad (8)$$

trong đó

$$b(x,n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \text{ (xem [3], tr. 181-182)}$$

Vì p thay đổi từ lô này sang lô khác theo một phân bố xác suất có mật độ $\pi(p)$ tổn thất trung bình khi sử dụng phương án (n, δ_n) kiểm tra các lô khác nhau là

$$L(N, n, \delta_n) = \int_0^1 L(N, n, \delta_n/p)\pi(p)dp. \qquad (9)$$

Vấn đề là cần chọn phương án làm cực tiểu $L(N, n, \delta_n)$.

III - LỜI GIẢI

Từ (8) và (9) ta có

$$L(N, n, \delta_n) = (N-n)\sum_{x=0}^{n}\int_0^1 K_{\delta_n(x)}(p)b(x,n,p)\pi(p)dp + n\int_0^1 K_s(p)\pi(p)dp. \qquad (10)$$

Ta thấy, khi n cố định để cực tiểu hóa $L(N, \nu, \delta_n)$ chỉ cần chọn δ_n làm cực tiểu

$$\int_0^1 K_{\delta_n(x)}(p) b(x,n,p)\pi(p)dp \qquad (11)$$

với mỗi x = 0, 1, 2,...,n. Hơn nữa, vì

$$b(x,n,p)\pi(p) = \pi(p/n,x)\int_0^1 b(n,x,t)\pi(t)dt,$$

(theo định lý Bayes), suy ra chỉ cần chọn $\delta_n(x)$ làm cực tiểu

$$\int_0^1 K_{\delta_n(x)}(p)\pi(p/n,x)dp,$$

với mỗi giá trị của x, khi n đã cho.

Ta cần đến hai bổ đề quan trọng sau đây.

Bổ đề 1 . Ký hiệu

$$p_n(x) = \int_0^1 p\pi(p/n,x)dp.$$

Ta có các mệnh đề sau đây

- d_1 là tốt nhất khi và chỉ khi $p_n(x) \le p_1$ (13)
- d_2 là tốt nhất khi và chỉ khi $p_1(x) < p_n(x) \le p_3$ (14)
- d_3 là tốt nhất khi và chỉ khi $p_n(x) > p_3$ (15)

Bổ đề này có thể chứng minh bằng cách so sánh trực tiếp tổn thất ứng với mỗi quyết định.

Định lý 1 (xem [3], tr.324). Chất lượng trung bình hậu nghiệm $p_n(x)$ thỏa mãn các mối quan hệ sau đây:

Nếu phân bố tiên nghiệm suy biến, $p_n(x)$ là một hằng số.

Khi phân bố tiên nghiệm $\pi(p)$ không suy biến, ta có

(a) $p_n(x) < p_n(x+1)$,

(b) $p_n(x) > p_{n+1}(x)$,

(c) $p_n(x) < p_{n+1}(x+1)$.

Từ bổ đề 1 và định lý 1 ta thu được định lý 2 sau đây.

Định lý 2. Với n cố định, qui tắc quyết định tối ưu là

$$\delta_n(x) = \begin{cases} d_1 \text{ nếu } x \le c_1(n) \\ d_2 \text{ nếu } c_1(n) < x \le c_2(n) \\ d_3 \text{ nếu } x > c_2(n) \end{cases}$$

trong đó $c_1(n)$ là giá trị nguyên lớn nhất của x thỏa

$$p_n(x) \le p_1 \qquad (17)$$

$c_2(n)$ là giá trị nguyên lớn nhất của x thỏa

$$p_n(x) \le p_3$$

Hệ quả 1. $c_1(n)$ và $c_2(n)$ là các hàm không giảm của n

Kết quả nêu trong định lý 2 cho phép hạn chế việc tìm phương án tối ưu trong số các phương án xác định bởi bộ ba số nguyên (n, c_1, c_2), trong đó $0 \le c_1 < c_2 \le n$ và qui tắc quyết định như nêu trong (16). Đối với các phương án loại này, công thức (10) có thể được viết lại như sau :

$$L(N,n,\delta_n) = L(N,n,c_1,c_2) = n\int_0^1 K_s(p)\pi(p)dp + (N-n)\left\{\sum_{x=0}^{c_1}\int_0^1 K_a(p)\times\right.$$

$$\left. b(x,n,p)\pi(p)dp + \sum_{x=c_1+1}^{c_2}\int_0^1 K_t(p)b(x,n,p)\pi(p)dp + \sum_{x=c_2+1}^{n}\int_0^1 K_r(p)b(x,n,p)\pi(p)dp\right\}$$

$$= n\int_0^1 K_s(p)\pi(p)dp + (N-n)\left\{\int_0^1 K_r(p)\pi(p)dp + \int_0^1 [K_a(p)-K_t(p)]\sum_{x=0}^{c_1} b(x,n,p)\pi(p)dp\right.$$

$$\left. + \int_0^1 [K_t(p)-K_r(p)]\sum_{x=o}^{c_2} b(x,n,p)\pi(p)dp\right\} = nK_s + (N-n)\left\{K_r + \int_0^1 [K_a(p)-K_t(p)]\right.$$

$$\left. B(c_1,n,p)\pi(p)dp + \int_0^1 [K_t(p)-K_r(p)]B(c_2,n,p)\pi(p)dp\right\} = nK_s + (N-n)d(n,c_1,c_2), \tag{19}$$

trong đó

$$B(c,n,p) = \sum_{x=0}^{c} b(x,n,p),$$

và

$$K_s = \int_0^1 K_s(p)\pi(p)dp, \qquad K_r = \int_0^1 K_r(p)\pi(p)dp,$$

$$d(n,c_1,c_2) = \int_0^1 [K_a(p)-K_t(p)]B(c_1,n,p)\pi(p)dp$$

$$+ \int_0^1 [K_t(p)-K_r(p)]B(c_2,n,p)\pi(p)dp + K_r. \tag{20}$$

$d(n, c1, c2)$ được gọi là tổn thất quyết định với mỗi giá trị n, tổn thất quyết định cực tiểu là : $d(n, c1(n), c2(n))$.

Đối với các phương án Bayes ba quyết định ta cũng có hai tính chất đã được chứng minh trong trường hợp hai quyết định (xem [3]).

Định lý 3 . Định nghĩa

$$d^o(n) = \inf d(n,c_1,c_2),\ 0 \le c_1 < c_2 \le n,\ n = 1,2,\ldots$$

và

$$d^o(n) = \min\{K_a, K_t, K_r\} \tag{21}$$

Ta có $d^o(n)$ là hàm không tăng của n.

Chứng minh: Ký hiệu $S_n = \{(c1, c2): 0 \le c1 < c2 \le n\}$, khi đó $S_n \subseteq S_{n+1}$ và

$$d^o(n) = \inf_{S_n} d(n,c_1,c_2) \ge \inf_{S_{n+1}} d(n,c_1,c_2) = d^o(n+1).$$

Hệ quả 2. Giao điểm của $L(N, n, c1(n), c2(n))$ với trục tung $= (nkS - nd^o(n))$ là hàm tăng của n.

Định lý 4. Nếu $(n^o(N), c1\,(n^o), c2(n^o))$ là phương án tối ưu ứng với cơ lô N, khi đó $n^o(N)$ là hàm không giảm của N.

Chứng minh: Để đơn giản hóa chứng minh, ta hãy mở rộng định nghĩa của tổn thất trung bình (19) cho cả các giá trị không âm của cỡ lô N. Đặt

$$L(N, n, c1, c2) = \begin{cases} N\,K_s \text{ khi } 0 < N < n \\ n\,K_s + (N-n)\,d(n, c1, c2) \text{ khi } n \le N \end{cases} \tag{22}$$

và xem L như một hàm của cỡ lô N.

Trước hết chú ý rằng, một phương án (n, c1, c2) mà d(n, c1, c2) > K_s sẽ không thể là phương án tối ưu với bất kỳ giá trị nào của N, do đó có thể loại bỏ ngay những phương án như thế.

Khi d(n, c1, c2) ≤ K_s, (22) là hàm lõm của n, do đó tổn thất ứng với lược đồ lấy mẫu tối ưu

$$L^o(N) = \inf_{(n,c_1,c_2)} L(N,n,c_1,c_2) \tag{23}$$

cũng là hàm lõm của N.

Đồ thị của $L^O(N)$ tuyến tính từng khúc, hệ số góc tại điểm (N, $L^O(N)$) là $d^O(N)$ với n = $n^O(N)$. Vì $L^O(N)$ là hàm lõm, $d^O(n(N))$ sẽ là hàm không tăng của N và do đó $n^O(N)$ là hàm không giảm của N, (theo định lý 3).

IV- XÂY DỰNG LƯỢC ĐỒ LẤY MẪU BAYES

Trong mục trước đã chứng minh rằng, tổn thất cực tiểu (23) là hàm lõm, tuyến tính từng khúc của cỡ lô. Các kết quả này giúp ta đưa ra thuật toán dưới đây, xác định phương án tối ưu cho mọi cỡ lô nhỏ hơn một số M cho trước. Thuật toán này tương tự thuật toán của Hald trong [3] đối với trường hợp có hai quyết định. Trước hết, chọn giá trị n, sau đó tìm các số c1(n) c2(n). Xác định khoảng các giá trị N mà ứng với nó bộ ba vừa chọn (n, c1(n), c2(n)) là phương án tối ưu. Lặp lại quá trình này với các giá trị n lớn hơn cho đến khi khoảng giá trị N chứa cỡ lô được quan tâm. Như là sản phẩm kèm theo, ta thu được phương án tối ưu ứng với mọi cỡ lô nhỏ hơn M.

Định nghĩa

$$L_{sub}(N,n) = \min_{i \le n} L(N,i,c_1(n),c_2(n)),\ n = 0,1,2,... \tag{24}$$

Ta thấy rằng

$$L_{sub}(N,n) \downarrow L^o(N)\ khi\ n \to \infty$$

Giả sử muốn xác định phương án tối ưu ứng với mỗi cỡ lô nhỏ hơn M. Để làm việc này, chỉ cần xác định $L^O(M)$.Vì Lsub(M, n) = $L^O(M)$ khi n ≥ M, chỉ cần xác định liên tiếp các hàm

Lsub(M, n), n = 0, 1, 2,...M.

Hơn nữa dễ dàng thấy rằng, trên thực tế có thể dừng quá trình xác định này trước khi n = M ; cỡ mẫu n nhỏ nhất thỏa

$$nK_s > L_{sub}(M,n)$$

sẽ là cận trên các cỡ mẫu cần xét.

Ta đã chứng minh rằng, hàm tổn thất trung bình cực tiểu là hàm lõm tuyến tính từng khúc của cỡ lô N. Điều này dẫn đến có thể biểu diễn $L^O(M)$ bằng các đỉnh. Các đỉnh này có thể đặc trưng bằng bộ tứ (N_i, n_i, c1(n_i), c2(n_i)), trong đó N_i ≥ n_i ≥ 1 . Giả sử đã xác định được các đỉnh, phương án kiểm tra tối ưu khi đó sẽ là :

Nếu N < N_1, không lấy mẫu; chấp nhận phần còn lại của lô nếu

$$\int_0^1 p\pi(p)dp \le p_1,$$

sàng lọc nếu

$$p_1 < \int_0^1 p\pi(p)dp \le p_3$$

và loại bỏ trong trường hợp còn lại.

Nếu N_i ≤ N < N_{i+1} lấy mẫu cỡ n_i.

Chấp nhận nếu x ≤ c1(n_i),

sàng lọc nếu $\qquad c_1(n_i) < x \le c_2(n_i)$,

loại bỏ nếu $\qquad x > c_2(n_i)$.

Các giá trị $c_1(n_i)$ và $c_2(n_i)$ được xác định theo công thức (17) và (18), x là số phế phẩm kiểm tra thấy trong mẫu.

Bộ tứ $(N_i, n_i, c_1(n_i), c_2(n_i))$ có thể xác định được bằng thuật toán mô tả dưới đây. Thuật toán này được xây dựng dựa trên nhận xét rằng tổn thất kỳ vọng là hàm tuyến tính của cỡ lô N với hệ số góc [= $d^o(n)$] giảm theo n và giao điểm với trục tung [= $nk_s - nd^o(n)$] tăng theo n. Giao điểm P(j,k) của hai hàm tổn trung bình ứng với hai cỡ mẫu j và k, $0 \le j < k$, được cho bởi

$$P(j,k) = \frac{(k-j)K_s + jd^o(j) - kd^o(k)}{d^o(j) - d^o(k)} \tag{25}$$

trong đó phương án với cỡ mẫu j có tổn thất trung bình nhỏ hơn khi $N < P(j,k)$ và phương án với cỡ mẫu k có tổn thất trung bình nhỏ hơn khi $N > P(j,k)$. Các giao điểm được sử dụng để xác định đinh như sau :

Bước 1: Cho n = 1, sử dụng (17) và (18) tính $c_1(n)$ và $c_2(n)$

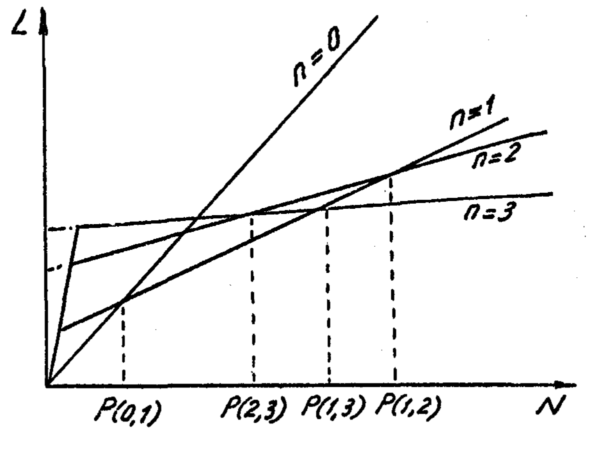
Bước 2: Sử dụng (25) tính P(0,n). Gán $(N_1, n_1, c_1(n), c_2(n)) := (P(0,n), n, c_1(n), c_2(n))$. Cho i = 1.

Bước 3: Tăng n lên 1, sử dụng (17) và (18) tính $c_1(n)$, $c_2(n)$.

Bước 4: Sử dụng (25) tính $P(n_i,n)$.

Bước 5: Nếu $P(n_i,n) > N_i$, gán $(N_{i+1}, n_{i+1}, c_1(n_{i+1}), c_2(n_{i+1})) := (P(n_i,n), n, c_1(n), c_2(n))$. Tăng i lên 1. Chuyền sang bước 3. Nếu $P(n_i, n) \le N_i$, giảm i đi 1. Nếu i = 0, chuyền sang bước 2; trường hợp i > 0, chuyền sang bước 4.

Thuật toán kết thúc khi n đủ lớn. Hình 1 dưới đây mô tả thuật toán.



Hình 1 : Xác định phương án lấy mẫu kiểm tra tối ưu đối với lô cỡ N. P(1,j) là giao điểm hai đường ứng với n = 1 và n = j. Nếu N < P(0,1), không lấy mẫu. Nếu P(0,1) < N < P(1,3), lấy mẫu cỡ n = 1. Khi P(1,3) < N, lấy mẫu cỡ n = 3.

Nhận ngày 20 - 4 - 1989

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. W.C. Guenther, (1971) : On the Determination of Single Sampling Attribute Plans Based Upon a Linear Cost Model and a Prior Distribution. Technometrics,13, pp. 483-498.

2. A. Hald (1960) : The compound Hypergeometric Distribution and a System of Single Sampling Inspection Plans Based on Prior Distribution and costs. Technometrics, 2, pp. 275-340.

3. A. Hald (1981) : Statistical Theory of Sampling Inspection by Attribute s.Academic Press, London.

4. T. J. Lorenzen : Minimum Cost Sampling Plans Using Bayesian Methods. Naval Research Logistics Quarterly, 32, pp. 57-69.

5. Noon Charn Riew ; Do Sun Bai (1984) : An Economic Attributes Acceptance Sampling Plan with Three Decision Criteria Journal of quality Technologie, 16, pp. 136-143.

6. Nguyễn Thanh Tùng (1987) : Tối ưu và thuật toán trong một bài toán lấy mẫu kiểm tra. Tạp chí Khoa học Tính toán và Điều khiển, 3, pp. 11-19.

7. R. J. Pandey; A. K. Chawdhary (1972) : Single Sampling Plan by Attributes with Three Decision Criteria. Sankhya B, 34, pp. 265-278.

8. P. Thyregod (1974) : Bayesian Single Sampling Acceptance Plans for Finite Lot Size . Journal of Royal Stat. Society B, 36, pp. 305-319.

9. J. R., J. W. Schmidt ; G. K. Bennett; K.E. Case (1980): A Three Action Cost Model for Acceptance Sampling by Variables. Journal of Qual. Techn., 12, pp. 10-18.

ABSTRACT

Cost-optimal Attributes Acceptance Sampling Plans With Three Decision Criteria

We discuss the problem of constructing cost-optimal attributes acceptance sampling plans with three decision criteria. Hald 's Bayesian approach is utilized for finding the optimal plans. Basic assumptions are

- The production process is in control with respect to the prior distribution $\pi(p)$ so that the prior distribution of lot quality is a mixed binomial.

- The decisions which will be considered regarding the remainder of lot are acceptance, screening and rejection.

- The per item cost of inspection, acceptance, screening and rejection are linear functions of the process average.

- The decision criterion used is minimum average cost.