VỀ BÀI TOÁN THU HỒI ĐẦU TƯ VÀ ỨNG DỤNG TRONG VAY - THANH TOÁN NỢ

LÊ XUÂN LAM

1. MỞ ĐẦU

Xét một quần thể (xem [1], [2], [3])

(1.1) $\Omega = \Omega < T, q, v^o > = \{\omega^k_m : m \in N(T), k = 1, \ldots, v^o_m, v^o_m > 1\}$ trong đó số tự nhiên T là tuổi thọ tối đa của các cá thể ω^k_m, $m \in N(T) := \{-(T-1), \ldots, 0, 1, \ldots\}$; $k = 1, 2, \ldots, v^o_m$, $v^o_m \geqslant 1$. Dãy các đại lượng ngẫu nhiên (ĐLNN) nhận giá trị nguyên không âm $v^o = v^o_m$: $m \in N(T)$ là số các cá thể được sinh ra vào mỗi thời kỳ m, nếu $m \geqslant 0$ (hoặc các số cá thể $T_m(-m_{m+1})$ tuổi vào thời kỳ ban đầu nếu như $1 - T \leqslant m < 0$), Còn $p: = \{(p^{T_m+1}_m, \ldots, p^T_m) : m \in N(T)\}$ là họ các phân bố xác suất về các tuổi thọ τ^k_m của cá thể ω^k_m

(1.2) $P\{\tau^k_m = i\} = p^i_m$; $T_m + 1 \leqslant i \leqslant T$; $T_m = \max\{0, -m\}$

(1.3) $\sum\limits_{i=T_m+1}^{T} p^i_m = 1$, $0 \leqslant p^i_m \leqslant 1$; $T_m + 1 \leqslant i \leqslant T$.

Giả sử

(1.4) $\pi_1 = \{(a_i, p_i)\}^1_{i=0}$, $\pi_2 = \{(a_i, p_i)\}^3_{i=2}$

lần lượt là các chính sách đầu tư và khấu hao đối với quần thể (xem [1]). Trong đó α^o_{om}, α^i_{jm} ($j = 1 \div 3$, $i = 1 \div T$) là những ĐLNN nhận chỉ 1 trong 2 giá trị 0 hoặc 1 với các phân bố xác suất

(1.5) $$P\{\alpha^i_{jm} = 1\} = p^i_{jm}, (j = 1 \div 3, \ i = 1 \div T), \ P\{\alpha^o_{om} = 1\} = P^o_{om}$$

và tập các tham số thực:

(1.6) $$\begin{cases} p_o = \{p^o_{om} : o \leqslant p^o_{om} \leqslant 1, \ m \in N(T)\} \\ p_j = \{p^i_{jm} : o \leqslant p^i_{jm} \leqslant 1, \ m \in N(T), \ i = 1 \div T\}, \ j = 1 \div 3 \\ a_o = \{a^o_{om} : |a^o_{om}| \leqslant \overline{a}_o < +\infty, \ m \in N(T)\} \\ a_j = \{a^{i}_{jm} : |a^i_{jm}| \leqslant \overline{a_j} < +\infty, \ m \in N(T), \ i = 1 \div T\} \ j = 1 \div 3 \end{cases}$$

cũng đã cho trước

Chính sách «khấu hao» nêu trên đây chỉ có ý nghĩa thực tiễn như tên gọi của nó trong kinh tế, nếu đạt được «điều kiện thu hồi đầu tư» (xem [4, 5]). Trong trường hợp này quần thể Ω bao gồm các tài sản cố định ω^k_m được nghiên cứu. Trong Toán kinh tế và tài chính vấn đề này đã được đặt ra (xem [6, 7, 8, 9, 10, 11]). Tuy nhiên bài toán này còn chưa được giải quyết thỏa đáng (xem [12]). Vấn đề là ở chỗ, trong sự tác động ngẫu nhiên, các chính sách lên các cá thể của quần thể Ω (phát triển một cách ngẫu nhiên), người ta chưa xác lập được mối quan hệ chính xác giữa những chi phí hoặc tổn hao vật chất khi khai thác các tài sản cố định («đầu tư», và sự thu hồi lại những đầu tư đó («khấu hao»). Nhằm giải quyết vấn đề này, trong phần 2 «điều kiện thu hồi đầu tư» sẽ được thiết lập liên quan không chỉ đến các chính sách khấu hao, đầu tư, mà cả đến «chính sách hóa giá» (chi phí hay tổn hao vật chất khi cá thể bị loại khỏi quá trình khai thác), (xem [1]). Trong phần 3 các điều kiện thu hồi đầu tư sẽ được biểu thị dưới dạng các «phương trình thu hồi đầu tư» — như là mối liên hệ giữa tham số của các chính sách nêu trên. Trong phần 4 ta sẽ vận dụng các kết quả này vào một bài toán thực tiễn. Đó là vấn đề vay—thanh toán nợ.

2. ĐIỀU KIỆN THU HỒI ĐẦU TƯ

Liên quan đến những chi phí hay tổn hao vật chất khi cá thể bị loại khỏi quá trình khai thác, ta xét tập các tham số:

(2.1) $\widehat{a}_m = \{\widehat{a}^1_m, \ldots, \widehat{a}^T_m\}$, $\widetilde{a}_m = \{\widetilde{a}^1_m, \ldots, \widetilde{a}^T_m\}$

(2.2) $\widehat{p}_m = \{\widehat{p}^1_m, \ldots, \widehat{p}^T_m\}$, $\widetilde{p}_m = \{\widetilde{p}^1_m, \ldots, \widetilde{p}^T_m\}$

trong đó $\widehat{a}^i_m$ (và $\widetilde{a}^i_m$) là suất đầu tư thanh lý (và hệ số hóa giá) cho mỗi cá thể ω^k_M bị loại (xem [1] lúc i tuổi. Chúng thỏa mãn điều kiện:

(2. 3) $|a^i_m| < +\infty$, $0 \leqslant \widehat{a}^i_m \leqslant 1$, $(i = 1 \div T,\ m \in N(T))$.

Còn $\widehat{p}^i_m$ là xác suất có điều kiện đầu tư thanh lý (và xác suất được đánh giá lại) trong số các cá thể ω^k_m bị loại lúc i tuổi. Chúng thỏa mãn điều kiện

(2. 4) $0 \leqslant \widehat{p}^i_m \leqslant 1$, $0 \leqslant \widetilde{p}^i_m \leqslant 1$, $(i = 1 \div T,\ m \in N(T))$.

Gọi L^i_{m+i} (và D^i_{m+i}) là các lớp cá thể ω^k_m tồn tại (và bị loại) vào tuổi i, nghĩa là xem [1]):

(2. 5) $L^i_{m+i} = \{\omega^k_m \in \Omega,\ \tau^k_m > i\}$, $D^i_{m+1} = \{\omega^k_m \in \Omega,\ \tau^k_m = i\}$

Đặt $S^i_{m+i} := L^i_{m+i} \cup D^i_{m+i}$, ta thiết lập các ĐLNN $\widehat{\xi}^i(k, m)$ (hoặc $\widetilde{\zeta}^i(k, m)$) = biểu thị đầu tư thanh lý hoặc giá trị được đánh giá lại như sau

(2. 6) $\widehat{\xi}^i(k, m) = \widehat{a}^i_m \widehat{\alpha}^i_m \zeta^i(k, m)$, $(\omega^k_m \in D^i_{m+i})$,

(2. 7) $\widetilde{\zeta}^i(k, m) = \widetilde{a}^i_m \widetilde{\alpha}^i_m \xi^i(k, m)$, $(\omega^k_m \in L^i_{m+i})$,

trong đó $\widehat{\alpha}^i_m$ (và $\widetilde{\alpha}^i_m$) là các ĐLNN nhận chỉ 1 trong 2 giá trị 0 hoặc 1 với phân bố xác suất:

(2. 8) $P\{\widehat{\alpha}^i_m = 1\} = p^i_m$, $P\{\widetilde{\alpha}^i_m = 1\} = \widetilde{p}^i_m$.

Còn ĐLNN $\zeta^i(k, m)$ biểu thị giá trị của cá thể ω^k_m vào tuổi i tương ứng với chính sách đầu tư và khấu hao (1. 4) (xem [1])

(2. 9) $\zeta^o(k, m) = a^o_{om}\, \alpha^o_{om}$.

(2. 10) $\zeta^i(k, m) = \zeta^{i-1}(k, m) + \xi^i(k, m) - \rho^i(k, m)$, $(\omega^k_m \in S^i_{m+i})$.

(2. 11) $\xi^i(k, m) = a^i_{1m}\, \alpha^i_{1m}\, \zeta^{i-1}(k, m)$, $(\omega^k_m \in S^i_{m+i})$.

$$(2.12)\qquad \rho^i(k,m) = \begin{cases} a^i_{3m}\,\alpha^i_{3m}\,\zeta^{i-1}(k,m), & (\omega^k_m \in L^i_{m+i}) \\ a^i_{2m}\,\alpha^i_{2m}\,\zeta^o(k,m) + a^i_{3m}\,\alpha^i_{3m}\,\zeta^{i-1}(k,m), & (\omega^k_m \in D^i_{m+i}). \end{cases}$$

Định nghĩa 1. Bộ các tham số

$$(2.13)\qquad \widehat{\pi} = \langle \widehat{a}, \widehat{p}, \widetilde{a}, \widetilde{p} \rangle = \{ \widehat{a}_m, \widehat{p}_m, \widetilde{a}_m, \widetilde{p}_m ; m \in N(T) \}$$

được gọi là chính sách hóa giá đối với quần thể Ω.

Với mỗi $n = 0, 1, \ldots$, các số đặc trưng cho kết quả tác động của chính sách $\widehat{\pi}$ đối với Ω là đầu tư thanh lý trung bình $y^i_n(D;\widehat{\xi})$ và các giá trị trung bình được đánh giá lại $Y^i_n(L;\xi)$ đối với các cá thể i tuổi ở thời kỳ n. Trong đó (xem [1]) ứng với mỗi lớp $A_m \subset L^O_m$ (thế hệ m) và mỗi quá trình ngẫu nhiên $\varphi(k)$ (có tham số $k : \omega^k_m \in A_m \neq \phi$) ta sử dụng các ký hiệu:

$$(2.14)\qquad E(A_m;\varphi) = \begin{cases} O; & A_m = \phi \\ E\{ \sum\limits_{\omega^k_m \in A_m} (k), & A_m \neq \phi \} \end{cases}$$

$$(2.15)\qquad y^i_n(A;\varphi) = E\langle A^i_n ; \varphi^i(., n-i)\rangle, \quad (A = L, D, S)$$

Giả sử $\overline{t}_m$ là một số tự nhiên nào đó, sao cho:

$$(2.16)\qquad 1 \leqslant \overline{t}_m \leqslant t_m = \max\{ i : p^i_m > 0 \} \; (i = T_m + 1 \div T)$$

Khi đó trên cơ sở các số đặc trưng về đầu tư ban đầu $y^o_m(L;\zeta)$ và bổ sung $y^i_{m+i}(S;\xi)$ (xem [1]), ta xem

$$(2.17)\qquad \mathcal{S}_m = y^o_m(L;\zeta) + \sum_{i=1}^{m} [y^i_{m+i}(S;\xi) + y^i_{m+i}(D;\widehat{\xi})] - y^{t_m}_m + \overline{t}_m(L;\zeta)$$

là tồn hao trung bình trong thời hạn khấu hao $\overline{t}_m$ đối với thế hệ m.

Tương tự, từ khái niệm về số đặc trưng cho khấu hao $y^i_{m+i}(S;\varphi)$ (xem [1]) ta xem đại lượng

$$(2.18)\qquad R_m := \sum_{i=1}^{t_m} y^i_{m+i}(S;\varphi)$$

là tổng khấu hao trung bình tương ứng.

Bổ đề 1. Giả sử ĐLNN v^o_m độc lập với các ĐLNN τ^k_m $(k = 1, 2, \ldots)$ và $Ev^o_m < +\infty$, khi đó các đại lượng $\mathcal{S}_m$ và $\mathcal{R}_m$ là tồn tại và hữu hạn.

Chứng minh; Sự tồn tại và hữu hạn của các đại lượng $y^o_m(L;\zeta), y^i_{m+i}(S,\xi)$ và $y^i_{m+i}(S,\rho)$ suy ra từ định lý 1 của [1]. Bởi vậy để chứng minh bổ đề ta còn cần chỉ ra sự tồn tại và hữu hạn của các đại lượng $y^i_{m+1}(D;\widehat{\xi})$ và $y^{t_m}_{m+t_m}(L;\widetilde{\xi})$ 3

Ta biết rằng (xem (2.20) và 2.22) của [1] $|\zeta^i(k,m)| < +\infty$, $(i = 0, 1, \ldots, T)$ $(\omega^k_m \in S^i_{m+i})$, khi đó từ (2,6) (2.7) và (2.3) suy ra

(2.19) $\quad |\widehat{\xi}^i(k, m)| < +\infty \; (\omega_m^k \in D_{m+i}^i, \; |\widetilde{\xi}^i(k, m)| < +\infty, \; (\omega_m^k \in L_{m+i}^i).$

Từ (2,19) và kết luận 1 của bổ đề 1 trong [1] ta nhận thấy

(2.20) $$|y_{m+1_m}^{t_m}(L; \widetilde{\xi})| < +\infty \; |y_{m+i}^i(D; \widehat{\xi})| < +\infty, \; (i = 1 \div T).$$

Vì $1 \leqslant \overline{t}_m \leqslant t_m \leqslant T$, nên từ (2,20), (2.17) và (2.18) suy đa sự tồn tại và hữu hạn của $\mathcal{S}_m$ và $\mathcal{R}_m$. ĐPCM.

Định nghĩa 2. Trong các giả thiết của bổ đề 1, đẳng thức

(2.21) $$\mathcal{S}_m = \mathcal{R}_m$$

gọi là điều kiện thu hồi đầu tư đối với thế hệ m trong thời hạn khấu bao $\overline{t}_m$ (ứng với các chính sách π_1, π_2 và $\widehat{\pi}$ tác động lên Ω).

3. PHƯƠNG TRÌNH THU HỒI ĐẦU TƯ

Với moi $m \in N(T)$, $i = 1 \div T$, ta ký hiệu:

(3,1) $$\widehat{A}_m^i =: \widehat{a}_m^i \widehat{p}_m^i, \; \widetilde{A}_m^i := \widetilde{a}_m^i \widetilde{p}_m^i, \; A_{om}^o := a_{om}^o p_{om}^o, \quad A_{jm}^i = a_{jm}^i p_{jm}^i$$

(3.2) $$h_m^i := 1 + A_{1m}^i - A_{3m}^i, \quad g_m^i := -[A_{2m}^i A_{om}^o x_{m+i}^i(D) + y_{m+i}^i(D; \zeta)]$$

(3.3) $$H_m^i := \prod_{j=T_m-1}^{i} h^j \quad (m + i \geqslant 1, \; i \geqslant 1)$$

trong đó (xem [1])

(3.4) $$x_{m+i}^i(A) := E\{\text{card } A_{m+i}^i\} \; (\forall A_{m+i}^i \subset L_m^o).$$

Bổ đề 2. Trong các điều kiện của bổ đề 1, ta còn giả thiết rằng các ĐLNN α_{om}^o, α_{jm}^i $(i = 1 \div T, \; j = 1 \div 3)$ độc lập trong toàn bộ. Khi ấy với $i \geqslant 1$, ta có

(3. 5) $$y_{m+i}^i(L; \zeta) = H_m^i \, y_{m+T_m}^{T_m}(L; \zeta) - A_{om}^o \prod_{j=1}^{i} h_m^i \sum_{k=T_m+1}^{i} x_{m+k}^k(D), \; (m+i \geqslant 1)$$

(3. 6) $$y_{m+i}^i(S; \xi) = A_{1m}^i \left[H_m^{i-1} \, y_{m+T_m}^{T_m}(L; \zeta) - A_{om}^o \prod_{j=1}^{i-1} h_m^j \sum_{k=T_m+1}^{i-1} x_{m+k}^k(D)\right], \; (m+i \geqslant 1)$$

(3. 7) $$y_{m+i}^i(D; \widehat{\xi}) = A_{om}^o A_m^i \, x_{m+i}^i(D) \left[\prod_{j=1}^{i} h_m^j - A_{2m}^i\right], \; (m + i \geqslant 1)$$

(3. 8) $$y_{m+1}^i(S; \rho) = A_{3m}^i H_m^{i-1} \, y_{m+T_m}^{T_m}(L; \zeta) - A_{om}^o \prod_{j=1}^{i-1} h_m^j \sum_{k=T_m+1}^{i-1} x_{m+k}^k(D) + A_{om}^o A_{2m}^i \, x_{m+i}^i(D), \; (m + i \geqslant 1).$$

Chứng minh: Ta biết rằng, (xem bổ đề 2. 3 của [1])

(3. 9) $$y_{m+i}^i(D; \zeta) = \left[\prod_{j=1}^{i} h_m^j - A_{2m}^i\right] A_{om}^o \, x_{m+i}^i(D), \; (i = 1 \div T)$$

(3. 10) $$y_{m+i}^i(S; \rho) = A_{3m}^i \, y_{m+i-1}^{i-1}(L; \zeta) + A_{om}^o A_{2m}^i \, x_{m+i}^i(D)$$

(3. 11) $$y^{i}_{m+i}(S,\xi)=A^{i}_{1m}\,y^{i-1}_{m+i-1}(L,\zeta).$$

Ngoài ra từ (3. 2) và bổ 4 của [1], ta còn có

(3. 12) $$y^{i}_{m+i}(L;\zeta)=h^{i}_{m}\,y^{i-1}_{m+i\ \ 1}(L;\zeta)+g^{i}_{m},\ (m+i\geqslant 1)$$

(3. 12)' $$y^{o}_{m}(L;\zeta)=A^{o}_{om}\,x^{o}_{m}(L).$$

Từ (2, 6), (2. 15), (2. 8); (3. 1) và bổ đề 1 của [1] ta suy ra:

(3. 13) $$y^{i}_{m+i}(D;\widehat{\xi})=\Lambda^{i}_{m}\,y^{i}_{m+i}(D;\zeta).$$

Tương tự, từ (2. 7) ta cũng suy ra:

(3. 14) $$y^{i}_{m+i}(L;\widetilde{\zeta})=\widetilde{\Lambda}^{i}_{m}\,y^{i}_{m+i}(L;\zeta)$$

Từ (3. 9) và (3. 2) ta suy ra

(3. 15) $$g^{i}_{m}=-A^{o}_{om}\,x^{i}_{m+i}(D)\prod_{j=1}^{i}h^{j}_{m},\ (m+i\geqslant 1).$$

Khi sử dụng $(i-T_m)$ lần hệ thức (3. 12) từ (3. 3) ta có

(3. 16) $$y^{i}_{m+i}(L;\zeta)=H^{i}_{m}\,y^{T_m}_{m+T_m}(L;\zeta)+\sum_{k=T_m+1}^{i-1}\ \prod_{j=k+1}^{i}h^{j}_{m}\,g^{k}_{m}+g^{i}_{m}\,(m+i\geqslant 1).$$

Thay (3. 15) vào (3. 16) ta có (3. 5).

Từ (3. 11). (3. 5) ta có (3. 6).

Từ (3. 13), (3. 9), (3. 2) ta suy ra (3. 7).

Từ (3. 10) và (3. 5) ta suy ra (3. 8), ĐPCM.

Bổ đề 3. Với điều kiện $m+\overline{t_m}\geqslant 1$ và với các giả thiết của bổ đề 2, điều kiện thu hồi đầu tư đối với thế hệ m có dạng

$$(1-\widetilde{\Lambda}^{\overline{t_m}}_{m})H^{t_m}_{m}\,y^{T_m}_{m+T_m}(L;\zeta)-A^{o}_{m}\prod_{j=1}^{\overline{t_m}}h^{j}\sum_{k=T_m+1}^{\overline{t_m}}x^{k}_{m+k}(D)+$$

$$+\sum_{i=T_m+1}^{\overline{t_m}}(1+\widehat{\Lambda}^{i}_{m})\Lambda^{o}_{om}\,x^{i}_{m+i}(D)\left[\prod_{j=1}^{i}h^{i}_{m}-\Lambda^{i}_{2m}\right]+y^{o}_{m}(S;\zeta)-y^{T_m}_{m+T_m}(S;\xi)+\mathcal{A}_m=0$$

trong đó

(3. 18) $$\mathcal{A}_m=\sum_{i\leqslant T_m}[y^{i}_{m+i}(S;\xi)+y^{i}_{m+i}(D;\widetilde{\xi})-y^{i}_{m+i}(S;\rho)]$$

Chứng minh: Từ (2. 21), (2. 17), (2. 18) và (3. 10) ta có

$$0=S_m=R_m=y^{o}_{m}(L;\zeta)+\sum_{i=T_m+1}^{\overline{t_m}}\left[y^{i}_{m+i}(S;\xi)+y^{i}_{m+i}(D;\widehat{\xi})\right]-y^{\overline{t_m}}_{m+\overline{t_m}}(L;\widetilde{\zeta})$$

$$-\sum_{i=T_m+1}^{\overline{t_m}}y^{i}_{m+1}(S,\rho)+\mathcal{A}_m$$

Khi đó, từ (3.11), (3.13), (3.10) và (3.14) ta có

(3.19) $$0=y^{o}_{m}(L;\zeta)$$

$$+\sum_{i=T_m+1}^{\overline{t_m}}\Big[A^{i}_{1m}\,y^{i-1}_{m+1-i}(L;\zeta)+\widehat{\Lambda}^{i}_{m}\,y^{i}_{m+i}(D;\zeta)-A^{i}_{3m}\,y^{i-1}_{m+i-1}(L;\zeta)$$

$$- A^{o}_{om} A^{i}_{2m} x^{i}_{m+i}(D) \Big] - \tilde{A}^{\bar{t}_m}_{m} y^{\bar{t}_m}_{m+\bar{t}_m}(L;\zeta) + \mathcal{A}_m$$

$$= y^{o}_{m}(L;\ \zeta) + \sum_{i=T_m+1}^{\bar{t}_m} (A^{i}_{1m} - A^{i}_{3m})\, y^{i-1}_{m+i-1}(L;\zeta) - \tilde{A}^{\bar{t}_m}_{m} y^{\bar{t}_m}_{m+\bar{t}_m}(L;\ \zeta) +$$

$$+ \sum_{i=T_m+1}^{\bar{t}_m} \left[\hat{A}^{i}_{m} y^{i}_{m+i}(D;\zeta) - A^{o}_{om} A^{i}_{2m} x^{i}_{m+i}(D) \right] + \mathcal{A}_m$$

Khi sử dụng (3 2) và (3.12) ta có

(3.20) $$y^{i}_{m+t}(L;\zeta) - y^{i-1}_{m+1-1}(L;\zeta) + A^{o}_{om} A^{i}_{2m} x^{i}_{m+i}(D) + y^{i}_{m+i}(D;\zeta)$$
$$= \left(A^{i}_{1m} - A^{i}_{3m}\right) y^{i-1}_{m+i-1}(L:\zeta)\ ;\ (i \geqslant 1,\ m+i \geqslant 1).$$

Với chú ý rằng $T_m \geqslant -m$, từ (3.19) và (3.20) suy ra

(3.21) $$\left(1 - \tilde{A}^{\bar{t}_m}\right) y^{\bar{t}_m}_{m+\bar{t}_m}(L;\zeta) + \sum_{i=T_m+1}^{\bar{t}_m} \left(1 + \hat{A}^{i}_{m}\right) y^{i}_{m+i}(D;\zeta)$$
$$+ y^{o}_{m}(L;\zeta) - y^{T_m}_{m+T_m}(L;\ \zeta) + \mathcal{A}_m = 0.$$

Khi sử dụng (3.5) với $i = \bar{t}_m$, $m + \bar{t}_m \geqslant 1$, ta có

(3.22) $$y^{\bar{t}_m}_{m+\bar{t}_m}(L;\zeta) = H^{\bar{t}_m}_{m} y^{T_m}_{m+T_m}(L;\ \zeta) - A^{o}_{om} \prod_{j=1}^{\bar{t}_m} h^{j}_{m} \sum_{K=T_m+1}^{\bar{t}_m} x^{k}_{m+k}(D)$$

Mặt khác, từ (3.9), (3.2) ta suy ra.

(3.23) $$y^{i}_{m+i}(D;\xi) = A^{o}_{om} x^{i}_{m+i}(D) \left[\prod_{j=1}^{i} h^{j}_{m} - A^{i}_{2m} \right],\ (i \geqslant 1,\ m+i \geqslant 0).$$

Thay (3.23) và (3.22) vào (3,21) ta thu được (3.17), ĐPCM.

Nhằm xác định điều kiện thu hồi đầu tư trong mối liên hệ với các tham số trong tương lai của các chính sách liên đới và không làm giảm tính tổng quát của vấn đề, dưới đây ta xét bài toán này đối với mỗi thế hệ m trong tương lai ($m \geqslant 0$) và mỗi thế hệ m trong quá khứ ($m < 0$) mà còn phải tiếp tục thu hồi đầu tư ở một số thời kỳ trong tương lai nghĩa là $m + \bar{t}_m \geqslant 1$.

Định lý 1. Với các giả thiết của bổ đề **2** và với sự cố đầu tư ban đầu thực sự đối với thế hệ m trong tương lai, nghĩa là

(3.24) $$a^{o}_{om} > 0,\ p^{o}_{om} > 0,\ v^{o}_{m} \geqslant 1\ (\text{h.c.c}),\ m \geqslant 0,$$

thì điều kiện thu hồi đầu tư đối với thế hệ này được biểu thị dưới dạng tương đương là phương trình thu hồi đầu tư dưới đây:

(3.25) $$\left(1 - \tilde{A}^{\bar{t}_m}_{m}\right) q^{\bar{t}_m}_{m} H^{\bar{t}_m}_{m} + \sum_{j=1}^{\bar{t}_m} (1 + \hat{A}^{i}_{m})\, p^{i}_{m} (H^{i}_{m} - A^{i}_{2m}) = 0$$

trong đó với mỗi $m \in N(T)$ thì

(3.26) $$q^{i}_{m} := \begin{cases} 0,\ (i = T) \\ p^{i+1}_{m} + \ldots + p^{T}_{m},\ (T_m \leqslant i < T) \end{cases}$$

Chứng minh: Với $m \geqslant 0$, từ (1.2) và (3.10) ta suy ra $T_m = 0$ và $y^{T_m}_{m+T_m}(L;\ \zeta) =$

$= y^{o}_{m}(L;\zeta)$ và $\mathcal{A}_m = 0$. ~~Khi ấy~~ (3.17), có dạng

$$(3.27)\quad \left(1-\tilde{A}^{\bar{t}_m}_{m}\right) H^{\bar{t}_m}_{m}\; y^{o}_{m}\;(L;\zeta) - A^{o}_{om}\prod_{j=1}^{\bar{t}_m} h^{j}_{m}\sum_{k=1}^{\bar{t}_m} x^{k}_{m+k}(D) +$$

$$+\sum_{i=1}^{\bar{t}_m}(1+\hat{A}^{i}_{m})\,A^{o}_{om}x^{i}_{m=i}(D)\left[\prod_{j=4}^{i} h^{j}_{m} - A^{i}_{2m}\right] = 0$$

Với $i \geqslant T_m$, từ (1.5), (2.5) và (3.4) ta có thể suy ra (xem [1])

$$(3.28)\quad x^{i}_{m+i}(D) = \begin{cases} p^{i}_{m}\; x^{o}_{m}(L), & (m \geqslant 0) \\ p^{i}_{m}\; x^{-m}_{o}\;(L) & m < 0 \end{cases}$$

Khi đó từ (3.12), (3.21) ta nhận thấy (3.27) có dạng:

$$(3.29)\quad (1-\tilde{A}^{\bar{t}_m}_{m})H^{\bar{t}_m}_{m} - \prod_{j=1}^{\bar{t}_m} h^{j}_{m}\sum_{k=1}^{\bar{t}_m} p^{k}_{m} + \sum_{i=1}^{\bar{t}_m}(1+\hat{A}^{i}_{m})\,p^{i}_{m}\left[\prod_{j=1}^{i} h^{i}_{m} - A^{i}_{2m}\right] = 0$$

Từ (3. 29), (3.3), (3.26) ta thu được (3.25). ĐPCM.

Định lý 2. Với các giả thiết của bổ đề 2, giả sử rằng đối với thế hệ m trong quá khứ ($m < 0$) mà còn phải tiếp tục thu hồi đầu tư trong tương lai ($m + \bar{t}_m \geqslant 1$). Khi ấy phương trình thu hồi đầu tư đối với thế hệ này trong tương lai sẽ là

$$(3.30)\quad (1-\tilde{A}^{\bar{t}_m}_{m})\,H^{\bar{t}_m}_{m}\quad y^{-m}_{o}\quad (L;\zeta)\, q^{\bar{t}_m}_{q} + \sum_{i=1-m}^{\bar{t}_m}(1+\hat{A}^{i}_{m})\,[H^{i}_{m}\; y^{-m}_{o}\quad (L;\zeta)$$

$$- A^{o}_{om}\;A^{i}_{2m}\;x^{-m}_{o}\;(L)]\; p^{i}_{m} - y^{-m}_{o}\;(L;\zeta) + \bar{\mathcal{A}}_m = 0$$

trong đó (xem [1]) $y^{-m}_{o}\;(L;\zeta)$ và $x^{-m}_{o}\;(L)$ lần lượt là giá trị và lượng trung bình của các cá thể của thế hệ m tồn tại vào thời kỳ ban đầu, $\bar{\mathcal{A}}_m$ là chênh lệch giữa đầu tư và khấu hao trong quá khứ đối với thế hệ này:

$$(3.31)\quad \bar{\mathcal{A}}_m := \quad y^{o}_{m}(L\;\zeta) + \sum_{i=1}^{-m}[\,y^{i}_{m+i}\,(S;\xi) + y^{i}_{m+i}\,(D;\hat{\xi}) - y^{i}_{m+i}\,(S;\rho)\,].$$

Chứng minh: Với $m < 0$, từ (1.2) ta suy ra $T_m = -m$. Khi ấy thì (3.17) có dạng là

$$(3.32)\quad (1-\tilde{A}^{\bar{t}_m}_{m})\,[H^{\bar{t}_m}_{m}\quad y^{-m}_{o}\,(L;\zeta) - A^{o}_{om}\prod_{j=1}^{\bar{t}_m} h^{i}_{m}\sum_{k=1}^{\bar{t}_m} x^{k}_{m+k}\;(D)\,] +$$

$$+\sum_{i=1-m}^{\bar{t}_m}(1+\hat{A}^{i}_{m})A^{o}_{om}\quad x^{i}_{m+i}\quad (D)\left[\prod_{j=1}^{i} h^{j}_{m} - A^{i}_{2m}\right] + y^{o}_{m}\,(L;\zeta) - y^{-m}_{o}\;(L;\zeta)$$

$$- y^{-m}_{o}\;(L;\zeta) + \mathcal{A}_m = 0$$

Ta biết rằng (xem các công thức (3.25), (3.26) của [1]:

$$(3.\;33)\quad \zeta^{i-1}(k,\,m) = a^{o}_{om}\;\alpha^{o}_{om}\prod_{j=1}^{-m}(1 + a^{i}_{1m}\;\alpha^{j}_{1m} - a^{j}_{3m}\;\alpha^{j}_{3m})\;(\omega^{k}_{m}\in L^{-m}_{o})$$

(3. 34) $$H\{\zeta^{-m}(k, m)\} = A^{o}_{om} \prod_{j=1}^{-m} h^{i}_{m}, \ (\omega^{k}_{m} \in L^{-m}_{o}).$$

Khi sử dụng bổ đề 1 của [1] từ (3. 33) (3. 34) và (2. 15) ta suy ra:

(3. 35) $$y^{-m}_{o}(L; \zeta) = A^{o}_{om}\, x^{-m}_{o}(L) \prod_{j=1}^{-m} h^{j}_{m}.$$

Từ (3. 28), (3. 35), (3. 3) ta suy ra (3. 32) có dạng:

(3. 36) $$\left(1 - \tilde{A}^{\bar{t}_m}_{m}\right) H^{\bar{t}_m}_{m}\, y^{-m}_{o}(L; \zeta)\,(1 - \sum_{k=1-m}^{\bar{t}_m} p^{k}_{m}) + y^{o}_{m}(L; \zeta) - y^{-m}_{o}(L; \zeta) +$$
$$+\mathcal{A}_m + \sum_{i=1-m}^{\bar{t}_m} (1 + A^{i}_{m})[H^{i}_{m}\, y^{-m}_{o}(L; \zeta) - A^{o}_{om} A^{i}_{2m}\, x^{-m}_{o}(L)]p^{i}_{m}.$$

Mặt khác từ (1. 2), (1. $\bar{3}$) và (3. 26) ta dễ dàng suy ra

(3. 37) $$1 - \sum_{k=1-m}^{\bar{t}_m} p^{k} = q^{\bar{t}_m}.$$

Thay (3. 37) vào (3. 36) và dựa vào (3. 31), (3. 18) và (3. 22) ta thu được (3. 30). ĐPCM.

Hệ quả. Trong các điều kiện của bổ đề 2 với điều kiện (3. 24) và giả thiết thêm rằng một trong hai điều kiện sau đây được thực hiện:

(3. 38) $$\bar{t}_m = t_m \quad \text{(khấu hao đúng hạn)}$$

(3. 39) $$1 = \tilde{a}^{\bar{t}_m}_{m}\, \tilde{p}^{\bar{t}_m}_{m} \quad \text{(không có hóa giá vào thời kỳ hoàn tất thu hồi đầu tư)}$$

Khi đó $\forall i = 1 \div t_m : p^{i}_{m} > 0$ thì

(3. 40) $$A^{i}_{2m} = \begin{cases} H^{i}_{m}, & (m > 0) \\ \dfrac{y^{-m}_{o}(L; \zeta)}{A^{o}_{om}\, x^{-m}_{o}(L)}\, H^{i}_{m}, & (m < 0) \end{cases}$$

là một điều kiện đủ để thu hồi đầu tư đối với thế hệ m.

Chứng minh: Ta nhận thấy rằng, nếu $\bar{t}_m = t_m$ thì từ (2. 16) và (3. 26) ta suy ra $q^{\bar{t}_m}_{m} = q^{t_m}_{m} = 0$. Khi ấy từ đầu tiên của (3. 25) và (3. 30) triệt tiêu. Ta cũng có kết quả tương tự đối với trường hợp $1 = \tilde{A}^{i}_{m} = \tilde{a}^{i}_{m}\, \tilde{p}^{i}_{m}$ (xem (3. 1)). Khi đó, trong trường hợp $m > 0$. từ điều kiện (3. 40) dễ dàng suy ra phương trình thu hồi đầu tư (3. 25).

Trường hợp $m < 0$, từ (3. 30), (3. 12), (3. 2) và (3. 13) ta có:

(3. 41) $$y^{i}_{m+i}(S; \xi) - y^{i}_{m+i}(S; \rho) + y^{i}_{m+i}(D; \hat{\xi}) =$$
$$= y^{i}_{m+i}(L; \zeta) - y^{i-1}_{m+i-1}(L; \zeta) + (1 + \hat{A}^{i}_{m})\, y^{i}_{m+i}(D; \zeta).$$

Nhưng từ (3. 9) (3. 3), (3. 28), (3. 35) ta suy ra

(3. 42) $$y^{i}_{m+i}(D; \zeta) = p^{i}_{m}[H^{i}_{m}\, y^{-m}_{o}(L; \zeta) - A^{i}_{2m} A^{o}_{om}\, x^{-m}_{o}(L)].$$

Từ điều kiện (3. 41), (3. 42) và (3. 40) ta có

$$y^{i}_{m+i}(S; \xi) - y^{i}_{m+i}(S, \rho) + y^{i}_{m+i}(D; \hat{\xi}) = y^{i}_{m+i}(L; \zeta) - y^{i-1}_{m+i-1}(L; \zeta).$$

Khi đó từ (3. 31) ta thu được;

$$\mathcal{A} = y^{o}_{m}(L;\zeta) + \sum_{i=1}^{-m} y^{i}_{m+i}(L;\zeta) - y^{i-1}_{m+i-1}(L;\zeta) = y^{-m}_{o}(L;\zeta). \tag{3. 43}$$

Hơn nữa, từ (3. 43) và (3. 40) ta thu được phương trình thu hồi đầu tư (3. 30). ĐPCM.

Chú ý: Trong thực tiễn việc khấu hao nhằm thu hồi đầu tư thường được giải quyết một cách bình quân trong mỗi thời kỳ của thời gian khấu hao $\bar{t}_m$. Thông qua khái niệm « khấu hao thường niên » (xem [12])

$$r = \delta_m/\bar{t}_m. \tag{3. 44}$$

Về thực chất đây là trường hợp riêng của điều kiện thu hồi đầu tư (2. 21). Có thể chỉ ra rằng

$$y^{i}_{m+i}(S;\rho) = r = \delta_m/\bar{t}_m \tag{3. 45}$$

và các tham số của chính sách được xác định như sau:

$$p^{i}_{jm} = \hat{p}^{i}_{m} = \tilde{p}^{i}_{m} = 1,\ (j = 1 \div 3),\ a^{i}_{3m} = 0. \tag{3. 46}$$

$$a^{i}_{2m} = \frac{1 + \sum_{i=1}^{\bar{t}_m} \left(a^{i}_{1m} H^{i-1}_{m} q^{i-1}_{m} + \hat{a}^{i}_{m} H^{i}_{m} q^{i}_{m}\right) - \tilde{a}^{\bar{t}_m}_{m} H^{\bar{t}_m}_{m} q^{\bar{t}_m}_{m}}{p^{i}_{m}\left(\bar{t}_m + \sum_{j=1}^{\bar{t}_m} \hat{a}^{i}_{m}\right)} \tag{3. 47}$$

trong đó $H^{i}_{m} = \bigcap_{j=1}^{i} (1 + a^{j}_{1m})$.

4. ỨNG DỤNG VÀO VIỆC KẾ HOẠCH HÓA VAY — THANH TOÁN NỢ

Khi xét quá trình vay — thanh toán nợ, ta chia nhỏ chu kỳ thời gian ra (năm, tháng quí,...) để có thể giả thiết rằng tại mỗi thời kỳ $m = 0, 1, 2,...$ chỉ ký và bắt đầu thực hiện được không quá một hiệp định vay nợ (gọi là hiệp định m). Đối với mỗi hiệp định m ta đã qui định tỉ lệ trả nợ gốc vào thời kỳ $m+i$ (nghĩa là vào tuổi i của nó) là p^{i}_{m}. Khi đó (xem (2, 16)) t_m là số thời kỳ (kỳ hạn) thực hiện hiệp định m. Quần thể $\Omega < T, p, v^o >$ trong trường hợp này gồm những đơn vị tiền vốn (cá thể) chiếm dụng được bằng cách vay nợ Trong đó T là kỳ hạn của một hiệp định dài nhất có thể được; v^{o}_{m}, $(m \geqslant 0)$ là số đơn vị tiền gốc vay mới theo hiệp định m và v^{o}_{m}, $(m < 0)$ là số đơn vị tiền gốc của hiệp định còn nợ vào thời kỳ 0 (thời kỳ ban đầu).

Khi một đơn vị tiền vốn ω^{k}_{m} được vay mới theo hiệp định m, ta xem cá thể này được sinh ra trong Ω, khi nó được trả nợ thì ω^{k}_{m} là cá thể bị loại (xem [1, 2, 3]). Khi gọi a^{i}_{1m} là lãi suất vào tuổi i của hiệp định m và đặt $a^{o}_{om} = p^{o}_{om} = p^{i}_{1m} = 1$ thì chính sách đầu tư $\pi_1 = \{(a_j + p_j)\}_{j=0}^{1}$ là một chính sách vay nợ. Mỗi chính sách khấu hao $\pi_2 = \{(a_j, p_j)\}_{j=2}^{3}$ trong trường hợp này sẽ là một chính sách trả nợ, và điều kiện thu hồi đầu tư trong thời hạn $\bar{t}_m = t_m$ chính là điều kiện thanh toán nợ sòng phẳng (không có xóa nợ) đúng với quy định trả gốc của mỗi hiệp định m. Trên cơ sở công thức (3. 40) ta có thể lựa chọn (không phụ thuộc vào chính sách hóa giá $\hat{\pi}$) các tham số cho chính sách đầu tư và khấu hao như sau:

$$p^{i}_{jm} = 0\ (i = 1 \div t_m;\ j = 1,2) \tag{4. 1}$$

$$(4.2) \qquad a^i_{2m} = \begin{cases} \prod_{j=1}^{i} (1 + a^i_{1m} - a^j_{3m}), & (m \geq 0) \\ Z_m \prod_{j=1}^{i} (1 + a^j_{1m} - a^j_{3m}, & (m < 0) \end{cases}$$

trong đó: $u_m = E\{v^o_m\}$ và $Z_m = y_o^{-m}(L;\zeta)$ là lượng nợ của hiệp định $m\,(m < 0)$ vào thời kỳ ban đầu. Khi đó (xem (2.9), (2.12), (2.15)) $y^i_n(L;\zeta)$ và $y^i_n(S;\rho)$ lần lượt là lượng nợ và lượng trả trung bình của hiệp định $n-i$ vào thời kỳ n.

Từ (3.9), (3.35), (3.28), (3.15), (3.4) và (4.2) suy ra:

$$(4.3) \qquad y^i_n(D;\zeta) = 0, \quad (n > 0).$$

Dựa vào (3.12), (3.2), (3.28), (4.3) và (2.5) ta có:

$$(4.4) \qquad y^i_n(L;\zeta) = (1 + a^i_{1,\,n-i} - a^i_{3,\,n-i})\, y^{i-1}_{n-1}(L;\zeta) - a^i_{2,\,n-i}\, p^i_{n-i}\, u_{n-i}, \quad (n \geq 1)$$

Ngoài ra, từ (3.12), (3.4) và (2.5) suy ra:

$$(4.5) \qquad y^o_n(L;\zeta) = E\{v^o_n\} = u_n$$

và từ (3.10), (3.28) ta thu được:

$$(4.6) \qquad y^i_n(S;\zeta) = a^i_{3,\,n-i}\, y^{i-1}_{n-1}(L;\zeta) + a^i_{2,\,n-i}\, p^i_{n-i}\, u_{n-i}.$$

Đối với bài toán dự báo bị động (xem [1]) khi cho các giá trị trung bình $u_m = E\{v^o_m\}$ ($m \in N(T)$) ta có thể dựa vào phương trình sai phân (4.4) với điều kiện ban đầu (4.5) để dự báo lượng nợ trung bình $y^i_n(L;\zeta)$ của một hiệp định i tuổi vào thời kỳ $n\,(n \geq 1)$. Trên cơ sở này ta có thể sử dụng công thức (4.6) để dự báo lượng trả nợ trung bình tương ứng của hiệp định m. Khi đó lượng nợ và lượng trả nợ đối với tất cả các hiệp định tại mỗi thời kỳ n sẽ được xác định bởi công thức:

$$(4.7) \qquad y_n(L;\zeta) = \sum_{i=0}^{T-1} y^n_i(L;\zeta); \quad y_n(S;\rho) = \sum_{i=1}^{T} y^i_n(S;\rho).$$

Đối với những bài toán dự báo chủ động ta giả thiết rằng tiền trả nợ gốc trung bình cho các hiệp định n và yêu cầu vốn trung bình Δv_n vào thời kỳ n (phục vụ một mục tiêu kế hoạch nào đó), được lấy từ tiền vay mới trung bình u_n của chính thời kỳ đó. Khi ấy (xem [1, 2, 8]) ta có phương trình đổi mới sau đây:

$$(4.8) \qquad u_n + \sum_{i=1}^{T} p^i_{n-i}\, u_{n-i} = \Delta v_n, \quad (n \geq 1)$$

Vào thời kỳ ban đầu nếu biết lượng nợ gốc trung bình của các hiệp định i tuổi u_{-i}, ($i = 1 \div T-1$) ta có thể dựa vào phương trình sai phân cấp T(4.8) và các đại lượng Δv_n ($n \geq 1$) đã cho theo kế hoạch để dự báo (theo cách truy hồi) các lượng vay mới trung bình $u_n(n \geq 1)$. Trên cơ sở này lại dựa vào công thức (4.4) − (4.6) để dự báo các lượng nợ trung bình và lượng trả nợ trung bình như trong trường hợp bị động.

Nhân dịp này, tác giả tỏ lòng cảm ơn xemina «Giải tích số và các phương pháp ngẫu nhiên», đề tài khoa học kỹ thuật cấp nhà nước 48A − 04 − 05 − 02 thuộc chương trình «Tin học ứng dụng» và Giáo sư Nguyễn Quí Hỷ đã động viên và đóng góp nhiều ý kiến kiễn bổ ích để hoàn thiện công trình này.

Nhận ngày 1-6-1989

TÀI LIỆU DẪN

1. **Lê Xuân Lam.** Dự báo kết quả tác động của các chính sách lên một quần thể trong lý thuyết đổi mới. Toán học tính toán và điều khiển số 3 năm 1988.

2 **Nguyễn Quí Hỷ, Lê Xuân Lam.** Điều khiển tối ưu một quần thể trong lý thuyết đổi mới. **Báo cáo** HNKH Toán Cơ Tin học. Tháng 12 năm 1987.

3. **Nguyễn Quí Hỷ, Đào Trọng Thi, Lê Xuân Lam**, On the prediction and the optimal control for a population in the reneral theory. Report ICOMID, April, 1988.

4. **Lange. O**, Teoria reprodukcja i akumulacja. War. PWN. 1969.

5. **Minc B.**, Ekonomia politiozna socjalizmu. PWN. War. 1969.

6. **Boiteux M.**, Comment calcular l' amortissement. Revue d' econnomie politique. Vol. LXVI, 1956.

7. **Boiteux M.**, L'amortissment dépréciation des automobiles. Revue de statistique appliquée. Vol.IV, 4/1956.

8. **Kolosow A.**, Srod trawalei i ich rola w reprodukcji socjalisticznej PWE. War. 1960.

9. **Lisowski W.**, Problem zuzycja ekonomicznego środkow pracy. PWE. War. 1956.

10. ФИЛИППОВ П., Новые нормы амортизации к номика предприятии. Вестник статистики, No 12-1962

11. Encyklopedia ekonomizna, PWE, War, 1961.

12. **Kozniewska I.**, Teoria odnowienia PWN War. 1965