TẠP CHÍ KHOA HỌC TÍNH TOÁN VÀ ĐIỀU KHIỂN TẬP V (1989), SỐ 2 (14–21)

ĐÁNH GIÁ LỜI GIẢI CẬN TỐI ƯU BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỐI NGẪU ĐỐI VỚI BÀI TOÁN MIN–MAX CHO HỆ ĐIỀU KHIỂN NHIỀU ĐẦU VÀO

TRẦN HOÀNG YẾN

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Xét bài toán:

$$L_1(u(.)) = \max_{(s,t)\in S\times T} \left| d'_s(t)\, x(t) + \alpha_s(t) \right| \longrightarrow \min \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t) \\ t \in T = [0, t^*] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

$$H\, x(t) = g \tag{1.3}$$

$$u(t) \in U\,,\ t \in T,\ U = \{u \in R^r,\ Du = f,\ u_* \leqslant u \leqslant u^*\} \tag{1.4}$$

Trong đó S – tập hữu hạn các chỉ số s; T – khoảng thời gian có điểm kết thúc $t^* > 0$ cho trước; $x(t) \in R^n$ – véc tơ trạng thái của hệ động lực; x_0 – trạng thái ban đầu cho trước; $u(t) \in R^r$ – véc tơ điều khiển; c(t), $d_s(t) \in R^m$, $f \in R^k$ $k < r$; A(t), B(t), H, D – các ma trận có cỡ tương ứng là $n\times n$, $n\times r$, $m\times n$, $k\times r$. Hạn chế (1.4) gọi là hạn chế dạng đa diện. (Xem [1]). $d'_s(t)$ là chuyển vị của $d_s(t)$. Còn bất đẳng thức đối với các véc tơ có nghĩa là bất đẳng thức đó xảy ra với mọi thành phần của nó.

Điều khiển chấp nhận được $u^0(.) = (u(t),\ t \in T)$ ở đây là hàm véc tơ thuộc lớp $L^r_\infty[T]$ cùng với quĩ đạo tương ứng $x(t)$ của (1.2) thỏa mãn các hạn chế (1.3)–(1.4)

Điều khiển chấp nhận được $u_0(.) = (u^\varepsilon(.),\ \varepsilon > 0)$ gọi là tối ưu (ε – tối ưu hay cận tối ưu) của bài toán (1.1) – (1.4) nếu $L_1(u_0(.)) - L_1(u(.)) \leq 0$ $(L_1(u^0(.)) - L_1(u(.)) \leq \varepsilon)$ với mọi u(.) chấp nhận được.

Trong khi xây dựng thuật toán tìm điều khiển cận tối ưu của bài toán (1.1) – (1.4) một câu hỏi đặt ra là làm thế nào có được đánh giá cận tối ưu của hàm mục tiêu cho mỗi điều khiển chấp nhận được sau từng bước lặp. Điều này có ý nghĩa thiết thực vì trong nhiều trường hợp nhất là đối với các hệ liên tục, ta không thể (và cũng không cần) tìm ra hẳn điều khiển tối ưu, mà chỉ cần tìm với một độ chính xác nào đó cho phép. Một trong những phương pháp xây dựng đánh giá cận tối ưu là thông qua bài toán đối ngẫu (xem [2]). Tuy nhiên theo phương pháp này ta sẽ chỉ thu được đánh giá cận tối ưu tốt nếu cực trị của hàm mục tiêu ở bài toán đối ngẫu bằng giá trị tối ưu của hàm mục tiêu của bài toán ban đầu, mà tính chất này không phải lúc nào cũng có. Thông thường ta phải đặt thêm một số điều kiện (xem [3]). Trong một số trường hợp. bằng cách khảo sát trực tiếp ta có thể chứng minh được tính chất đã nêu mà không cần đặt thêm điều kiện gì lên các đối tượng ở mô hình bài toán. Kết quả trong [4] là một ví dụ về cách giải quyết theo hướng này trong trường hợp đơn giản của bài toán (1.1)−(1.4) với $S = 1$, $d(t) \equiv d$, $A(t) \equiv A$, $B(t) \equiv B$, $C(t) \equiv 0$, $r = 1$, hạn chế (1.4) có dạng $u_* \leq u(t) \geq u^*$, $t \in T$. Dưới đây ta sẽ phát triển kết quả [4] cho bài toán (1.1)−(1.4).

II. KẾT QUẢ CƠ BẢN

Đặt

$$\max_{(s,\, t) \in S \times T} |d'_s(t)\, x(t) + \alpha_s(t)| = -\lambda$$

và gọi $\Phi(t)$ là nghiệm cơ bản của phương trình vi phân ma trận

$$\begin{cases} \Phi(t) = A(t)\, \Phi(t) \\ \Phi(0) = E \end{cases}$$

Khi đó nghiệm $x(t)$ của (1.2) có dạng:

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(\tau)\, [B(\tau)\, u(\tau) + c(\tau)]\, d\tau$$

Thay vào (1.1)−(1.4) ta được bài toán tương đương sau:

$$\lambda \xrightarrow{(u(.).\ \lambda)} \max \tag{2.1}$$

$$-\omega^*_s(t) = d'_s(t)\, \Phi(t)x_0 - \alpha_s(t) + \lambda + d'_s(t)\, \Phi^{-1}(\tau)\, [B(\tau)\, u(\tau) + c(\tau)]\, d\tau \leq 0$$

$$s \in S \tag{2.2}$$

$$-\omega_{s*}(t) = d'_s(t)\, \Phi(t)\, x_0 - \alpha_s(t) + \lambda - d'_s\, \Phi^{-1}(\tau)\, [B(\tau)\, u(\tau) + c(\tau)]\, d\tau \leq 0$$

$$s \in S \tag{2.3}$$

$$u(t) - u^* \leq 0 \tag{2.4}$$

$$u(t) + u \leq 0 \tag{2.5}$$

$$H\, \Phi(t^*)x_0 - g + H \int_0^{t^*} \Phi(t^*)\Phi^{-1}(\tau)\, [B(\tau)u(\tau) + c(\tau)]\, d\tau = 0 \tag{2.6}$$

$$Du(t) - f = 0 \tag{2.7}$$

Theo lược đồ [3] ta có thể lập được bài toán đối ngẫu với bài toán (1.1)−(1.4) như sau:

$$L_2(v_{1s}(.).\ s \in S,\ v_{2s}(.),\ s \in S,\ v_3(.),\ v_4(.),\ y_I,\ y_{II}(.))$$

$$= \sum_{s \in S} \int_T \left[d'_s(t)\, \Phi(t)\, x_0 + \alpha_s(t) + d'_s\, \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(\tau)\, c(\tau)\, d\tau \right] [v_{2s}(t) - v_{1s}(t)]\, dt$$

$$+ u^{*\prime} \int_T v_3(t)\, dt - u'_* \int_T v_4(t)\, dt + f' \int_T y_{II}(t)\, dt$$

$$+ y'_I\, (g - H\, \Phi(t^*)\, x_0 - H\Phi(t^*) \int_T \Phi^{-1}(\tau)\, c(\tau)\, d\tau) \rightarrow \min \tag{2.8}$$

$$\sum_{s\in S}\int_T [v_{1s}(t) + v_{2s}(t)]\,dt = 1 \tag{2.9}$$

$$\sum_{s\in S} \psi'_s(t)B(t) + [v_3(t) - v_4(t)]' + y'_I H\Phi(t^*)\Phi^{-1}(t)B(t) + y_{II}(t)D = 0 \tag{2.10}$$

Trong đó

$v_{1s}(t) \geq 0,\ s\in S;\ v_{2s}(t) \geqslant 0,\ s\in S;\ v_{1s}(t), v_{2s}(t) \in L_1(T)$

$v_3(t) \geqslant 0;\ v_4(t) \geqslant 0;\ v_3(t), v_4(t) \in L_1^r(T)$

$y_I \in R^m;\ u_{II}(t) \in L_1(T);\ \psi_s(t)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \psi'_s(t) = -\psi'_s(t)A(t) - [v_{1s}(t) - v_{2s}(t)]\, d'_s(t) \\ \psi_s(t^*) = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Đại lượng

$$\beta(\lambda, u(.), v_{1s}(.), s\in S, v_{2s}(.), s\in S, v_3(.), v_4(.), y_I, y_{II}(.))$$

$$= \sum_{s\in S}\int_T \omega_s^*(t)v_{1s}(t)dt + \sum_{s\in S}\int_T \omega_{s*}(t)v_{2s}(t)\,dt +$$

$$+ \int_T v'_3(t)\,[u^* - u(t)]dt + \int_T v'_4(t)\,[u(t) - u_*]\,dt \tag{2.12}$$

sẽ là đánh giá cận tối ưu đối với các phần tử chấp nhận được u(.) cho bài toán (1.1) – (1.4) và các phần tử chấp nhận được ($v_{1s}(.)$; $s\in S$, $v_{2s}(.) s\in S$ $v_3(.)$, $v_4(.)$, y_I, $y_{II}(.)$) (cho bài toán (2.8) – (2.11)).

Điều đó có nghĩa là nếu $\beta(.) \leqslant \varepsilon$ thì u(.) là điều khiển ε – tối ưu của (1.1) (1.4) và ($v_{1s}(.)$, $s\in S$, $v_{2s}(.)$, $s\in S$, $v_3(.)$, $v_4(.)$, y_I, $y_{II}(.)$) là lời giải ε – tối ưu của bài toán (2.8) – (2.11).

Định lý. Điều kiện cần và đủ để điều khiển chấp nhận được $u^\varepsilon(.)$ là lời giải ε – tối ưu của (1.1) – (1.4) là tồn tại dãy các phần tử chấp nhận được của (2.8) – (2.11) $v^\gamma_{1s}(.)$, $s\in S$, $v^\gamma_{2s}(.)$, $s\in S$, $v^\gamma_3(.)$, $v^\gamma_4(.)$, $y^\gamma_I(.)$, $y^\gamma_{II}(.)$ sao cho

$$\lim_{\gamma\to\infty} \beta(\lambda, u(.), v_{1s}(.), s\in S, v_{2s}(.), s\in S, v_3(.), v_4(.), y_I, y_{II}(.)) \leqslant \varepsilon$$

Chứng minh

a) Điều kiện đủ là hiển nhiên.

b) Điều kiện cần:

Nếu $u^\varepsilon(.)$ là điều khiển ε-tối ưu của (1.1)-(1.4) thì tập các phần tử chấp nhận được của (1.1)-(1.4) và (2.8) – (2.11) khác rỗng. Hơn nữa tập các phần tử chấp nhận được của (1.1) – (1.4) bị chặn nên tồn tại điều khiển tối ưu của (1.1) – (1.4). Theo định lý 32 [3, phần III] $\exists\ \zeta_1^\gamma \to 0$, $\zeta_2^\gamma(.) \to 0$,

$$v_i^\gamma(.) \geqslant 0,\ i = \overline{1, 4}\quad y_I^\gamma, y_{II}^\gamma(.) \text{ sao cho}$$

$$\int_T \sum_{s\in S} \left[\tilde{v}^\gamma_{1s}(\alpha) - \tilde{v}^\gamma_{2s}(\alpha)\right]dt + \zeta_1^\gamma = 1$$

$$\left(\int_t^{t^*} \left[\tilde{v}^\gamma_{1s}(\alpha) - \tilde{v}^\gamma_{2s}(\alpha)\right] d'_s(\alpha)\Phi(\alpha)d(\alpha)\Phi^{-1}(t)B(t) + \left[\tilde{v}^\gamma_3(t) - \tilde{v}^\gamma_4(t)\right]' + \right.$$

$$+ \tilde{y}^{\gamma}_{I} H\Phi(t^*)\Phi^{-1}(t)B(t) + \tilde{y}^{\gamma}_{II}(t)D + \zeta^{\gamma}_{z}(t) = 0 \qquad (2.14)$$

và

$$\lim_{\gamma\to\infty} L_z(\tilde{v}_{1s}(.),\ s\in S,\ \tilde{v}_{2s}(.),\ s\in S\ \tilde{v}_3(.),\ \tilde{v}_4(.),\ \tilde{y}_I, \tilde{y}_{II}(.)) = L_1(u^o(.)) \qquad (2.15)$$

Để chọn $v^{\gamma}_{i}(.)$, y^{γ}_{I}, $y^{\gamma}_{II}(.)$ chấp nhận được ta xét từng trường hợp sau:

1) $\zeta^{\gamma}_{1} \geqslant 0$

Đặt

$$v^{\gamma}_{11}(t) = \tilde{v}^{\gamma}_{11}(t) + \frac{\zeta^{\gamma}_{1}}{t} \geqslant 0$$

$$v^{\gamma}_{1s}(t) = \tilde{v}^{\gamma}_{1s}(t) \geqslant 0 \qquad s = 1$$

$$v^{\gamma}_{2s}(t) = \tilde{v}^{\gamma}_{2s}(t) \geqslant 0 \qquad \forall s \in S$$

$$v^{\gamma\,\prime}_{3}(t) = v^{\gamma\,\prime}_{3}(t) + \left[\frac{\zeta^{\gamma}_{1}}{t^*} d'_{1}(t)\int_{t}^{t^*}\Phi(\alpha)d\alpha\ \Phi^{-1}(t)\ B(t)\right]^{+} + \zeta^{\gamma +}_{2}(t) > 0$$

$$v^{\gamma\,\prime}_{4}(t) = v^{\gamma\,\prime}_{4}(t) + \left[\frac{\zeta^{\gamma}_{1}}{t^*} d'_{1}(t)\int_{t}^{t^*}\Phi(\alpha)d\alpha\ \Phi^{-1}(t)B(t)\right]^{-} + \zeta^{\gamma -}_{2}(t) \geqslant 0$$

$$y^{\gamma}_{I} = \tilde{y}^{\gamma}_{I}$$

$$y^{\gamma}_{I}(t) = \tilde{y}^{\gamma}_{II}(t)$$

Ta thấy ngay (2.9) thỏa mãn do (2.13). Ngoài ra có thể kiểm tra được (2.10) thỏa mãn do (2.14). Như vậy $(v^{\gamma}_{1}(t),\ v^{\gamma}_{2}(t),\ v^{\gamma}_{3}(t),\ v^{\gamma}_{4}(t),\ y^{\gamma}_{I},\ y^{\gamma}_{II}(t)$ thỏa mãn (2.9), (2.10) tức là chấp nhận được.

Do $\zeta^{\gamma}_{1} \to 0$, $\zeta^{\gamma}_{2}(t) \to 0$ ta có: $v^{\gamma}_{i}(t) \xrightarrow{\gamma\to\infty} v^{\gamma}_{i}$ $\qquad \forall\ i = \overline{1,4}$

Vậy

$$\lim_{\gamma\to\infty} L_2 (v^{\gamma}_{1}(.), v^{\gamma}_{2}(.), v^{\gamma}_{3}(.), v^{\gamma}_{4}(.), y^{\gamma}_{I},\ y^{\gamma}_{II}(.)) = \lim_{\gamma\to\infty} L_2\ \tilde{v}^{\gamma}_{1}(.),\ \tilde{v}^{\gamma}_{2}(.),\ \tilde{v}^{\gamma}_{3}(.),\ \tilde{v}^{\gamma}_{4}(.),\ \tilde{y}^{\gamma}_{I},\ \tilde{y}^{\gamma}_{II}(.))$$

$$= L_1(u^o(.))$$

2) $\zeta^{\gamma}_{1} < 0$: ta phân ra hai trường hợp nhỏ: $S = I$

Đặt

$$S^{\pm}_{\gamma} = \left\{ t \in T\ \tilde{v}^{\gamma}_{1}(t) + \tilde{v}^{\gamma}_{z}(t) \gtrless \frac{|\zeta^{\gamma}_{1}|}{t^*} \right\}$$

$$0 < \rho_{\gamma} = \int_{S^-_{\gamma}} \left[\frac{|\zeta^{\gamma}_{1}|}{t^*} - \tilde{v}^{\gamma}_{1}(t) - \tilde{v}^{\gamma}_{2}(t)\right] dt \longrightarrow 0$$

$$\int_{S_\gamma^-}\left[-\frac{|\zeta_1^\gamma|}{t^*}+\tilde{v}_1^\gamma(t)+\tilde{v}_2^\gamma(t)\right]dt = 1+\rho_\gamma$$

$$S_\gamma^{+>} = \left\{t \in S_\gamma^+\ \tilde{v}_2^\gamma(t) \geq \frac{|\zeta_1^\gamma|}{t^*}\right\}$$

$$S_\gamma^{+<} = S_\gamma^+ \setminus S_\gamma^{+>}$$

Ta xác định

$$\begin{cases} v_1^\gamma(t) = v_2^\gamma(t) = 0 \text{ nếu } t \in S_\gamma^- \\ v_1^\gamma(t) = \dfrac{1}{1+\rho_\gamma}\tilde{v}_1^\gamma(t),\ v_2^\gamma(t) = \dfrac{1}{1+\rho_\gamma}\left[\tilde{v}_2^\gamma(t) - \dfrac{|\zeta_1^\gamma|}{t^*}\right] \text{nếu } t \in S_\gamma^{+>} \\ v_1^\gamma(t) = 0,\ v_2^\gamma(t) = \dfrac{1}{1+\rho_\gamma}\left[-\dfrac{|\zeta_1^\gamma|}{t^*}+\tilde{v}_1^\gamma(t)+\tilde{v}_2^\gamma(t)\right] \text{nếu } t \in S_\gamma^{+<} \end{cases} \quad (2.16)$$

Dễ thấy $v_1^\gamma(t) \geq 0,\ v_2^\gamma(t) \geq 0,\ v_1^\gamma(t) \xrightarrow{\gamma\to\infty} \tilde{v}_1^\gamma(t)$

$$v_2^\gamma(t) \xrightarrow{\gamma\to\infty} \tilde{v}_2^\gamma(t)$$

$$\int\left[v_1^\gamma(t)+v_2^\gamma(t)\right]dt = \int_{S_\gamma^+}\frac{1}{1+\rho_\gamma}\left[-\frac{|\zeta_1^\gamma|}{t^*}+\tilde{v}_1^\gamma(t)+\tilde{v}_2^\gamma(t)\right]dt = 1$$

Như vậy (2.9) thỏa mãn. Tiếp theo ta đặt

$$v_3^{\gamma'}(t) = \tilde{v}_3^{\gamma'}(t) + \left[\int_t^{t^*}\left[\tilde{v}_1^\gamma(\alpha) - \tilde{v}_2^\gamma(\alpha) - v_1^\gamma(\alpha) + v_2^\gamma(\alpha)\, d(\alpha)\,\Phi(\alpha)d\alpha\,\Phi^{-1}(t)B(t)\right]^+ + \zeta_2^{\gamma+}(t) \quad (2.17)$$

$$v_4^{\gamma'}(t) = \tilde{v}_4^{\gamma'}(t) + \left[\int_t^{t^*}\left[\tilde{v}_1^\gamma(\alpha) - \tilde{v}_2^\gamma(\alpha) - v_1^\gamma(\alpha) + v_2^\gamma(\alpha)\, d(\alpha)\,\Phi(\alpha)d\alpha\,\Phi^{-1}(t)B(t)\right]^- + \zeta_2^{\gamma-}(t) \quad (2.18)$$

$$y_I^\gamma = \tilde{y}_I^\gamma,\quad y_{II}^\gamma(t) = \tilde{y}_{II}^\gamma(t) \quad (2.19)$$

Dễ thấy $v_3^\gamma(t) \xrightarrow{\gamma\to\infty} \tilde{v}_3^\gamma(t),\quad v_4^\gamma(t) \xrightarrow{\gamma\to\infty} \tilde{v}_4^\gamma(t)$

Có thể kiểm tra được là (2.10) thỏa mãn nên

$$\left(v_1^\gamma(.),\ v_2^\gamma(.),\ v_3^\gamma(.),\ v_4^\gamma(.),\ y_I^\gamma,\ y_{II}^\gamma(.)\right)$$

là chấp nhận được. Hơn nữa

$$\lim_{\gamma\to\infty} L_2\left(v_1^\gamma(t),\ v_2^\gamma(t),\ v_3^\gamma(t),\ v_4^\gamma(t),\ y_I^\gamma,\ y_{II}^\gamma(t)\right) =$$

$$= \lim_{\gamma\to\infty} L_2\left(\tilde{v}_1^\gamma(t),\ \tilde{v}_2^\gamma(t),\ \tilde{v}_3^\gamma(t),\ \tilde{v}_4^\gamma(t),\ \tilde{y}_I^\gamma,\ \tilde{y}_{II}^\gamma(t)\right) = L_1(u^o(t)).$$

$S \neq I$

Đầu tiên chúng ta chứng minh bằng phản chứng mệnh đề sau: $\exists j \in (1, 2, ..., S)$ để

$$\rho_j^{\gamma'} = 1 - \sum_{s=j} \int_T \left[v_{1s}^\gamma(t) + v_{2s}^\gamma(t)\right] dt$$

là một số dương

Giả sử $$\forall j : \rho_j^{\gamma'} \leq 0$$

Khi đó $$\sum_{j=1}^{S} \rho_j^{\gamma'} \leq 0$$

Nhưng

$$\sum_{j=1}^{S} \rho_j^{\gamma'} = s - (s-1) \sum_{s=1}^{S} \int_T \left[\tilde{v}_1^\gamma(t) + \tilde{v}_2^\gamma(t)\right] dt$$

nên

$$\sum_{s=1}^{S} \int_T \left[\tilde{v}_1^\gamma(t) + \tilde{v}_2^\gamma(t)\right] dt \geqslant 1 + \frac{1}{s-1}$$

Do $$\sum_{s=1}^{S} \int_T \left[\tilde{v}_1^\gamma(t) + \tilde{v}_2^\gamma(t)\right] dt + \zeta_1^\gamma = 1$$

nên $$|\zeta_1^\gamma| \geqslant \frac{1}{s-1}$$

Vì $\zeta_1^\gamma \xrightarrow{\gamma\to\infty} 0$ nên điều trên là vô lý.

Bây giờ không mất tính tổng quát ta có thể giả sử

$$\rho^{\gamma'} = \rho_1^{\gamma'} = 1 - \sum_{s\neq 1} \int_T \left[v_{1s}^\gamma(t) + v_{2s}^\gamma(t)\right] dt > 0.$$

Tương tự như trong trường hợp $S = 1$ ta đặt

$$S_\gamma^{\pm} = \left\{ t \in T\ v_{11}^\gamma(t) + v_{21}^\gamma(t) \gtrless \frac{|\zeta_1^\gamma|}{t^*} \right\}$$

$$0 < \rho_\gamma = \int_{S_\gamma^-} \left[\frac{|\zeta_1^\gamma|}{t^*} - v_{11}^\gamma(t) - v_{21}^\gamma(t)\right] dt \to 0$$

$$\int_{S_\gamma^+}\left[-\frac{|\zeta_1^\gamma|}{t^*}+\tilde{v}_{11}^\gamma(t)+\tilde{v}_{21}^\gamma(t)\right]dt=\tilde{\rho}'_\gamma+\rho_\gamma$$

$$S_\gamma^{+>}=\left\{t\in S_\gamma^+\ \tilde{v}_2^\gamma(t)\geqslant\frac{|\zeta_1^\gamma|}{t^*}-\right\}$$

$$S_\gamma^{+<}=S_\gamma^+\setminus S_\gamma^{+>}$$

$$\begin{cases} v_{11}^\gamma(t)=v_{21}^\gamma(t)=0 \quad \text{nếu} \quad t\in S_\gamma^- \\ v_{11}^\gamma(t)=\dfrac{\rho'_\gamma}{\rho'_\gamma+\rho^\gamma}\tilde{v}_{11}^\gamma(t),\quad v_{21}^\gamma(t)=\dfrac{\rho'_\gamma}{\rho'_\gamma+\rho_\gamma}\left[\tilde{v}_{21}^\gamma(t)-\dfrac{|\zeta_1^\gamma|}{t^*}\right] \text{ nếu } t\in S_\gamma^{+>} \\ v_{11}^\gamma(t)=0,\quad v_{21}^\gamma(t)=\dfrac{\rho'_\gamma}{\rho'_\gamma+\rho_\gamma}\left[-\dfrac{|\zeta_1^\gamma|}{t^*}+\tilde{v}_{11}^\gamma(t)+\tilde{v}_{21}^\gamma(t)\right] \text{ nếu } t\in S_\gamma^{+<} \end{cases} \tag{2.20}$$

$$\begin{cases} v_{1s}^\gamma(t)=\tilde{v}_{1s}^\gamma(t) \\ v_{2s}^\gamma(t)=v_{2s}^\gamma(t) \quad S\neq 1 \end{cases} \tag{2.21}$$

Dễ thấy $\quad v_{1s}^\gamma(t)\geqslant 0,\quad v_{2s}^\gamma(t)\geqslant 0,\quad v_{1s}^\gamma(t)\xrightarrow{\gamma\to\infty}\tilde{v}_{1s}^\gamma(t)$

$$v_{2s}^\gamma(t)\xrightarrow{\gamma\to\infty}\tilde{v}_{2s}^\gamma(t)$$

$$\sum_{s=1}^{S}\int_T\left[v_{1s}^\gamma(t)+v_{2s}^\gamma(t)\right]dt=\int_T\left[v_{11}^\gamma(t)+v_{21}^\gamma(t)\right]dt+$$

$$+\sum_{s\neq 1}^{S}\int_T\left[v_{1s}^\gamma(t)+\tilde{v}_{2s}^\gamma(t)\right]dt=\int_T\left[v_{11}^\gamma(t)+v_{21}^\gamma(t)\right]dt+(1-\rho'_\gamma)=$$

$$=1-\rho'_\gamma+\int\frac{\rho'_\gamma}{\rho'_\gamma+\rho_\gamma}\left[-\frac{|\zeta_1^\gamma|}{t^*}+\tilde{v}_{11}^\gamma(t)+\tilde{v}_{21}^\gamma(t)\right]dt=$$

$$=1-\rho'_\gamma+\frac{\rho'_\gamma}{\rho'_\gamma+\rho_\gamma}(\rho'_\gamma\ \rho_\gamma)=1$$

Như vậy (2.9) thỏa mãn.

Đặt $v_3^\gamma(t)$, $v_4^\gamma(t)$, y_I^γ, $y_{II}^\gamma(t)$ như các công thức (2.17) (2.18) và (2.19) tương ứng. Như ta đã thấy (2.10) thỏa mãn.

Vậy

$$\left(v_{1s}^{\gamma}(.),\quad s \in S,\quad v_{2s}^{\gamma}(.),\quad s \in S,\quad v_3^{\gamma}(.),\quad v_4^{\gamma}(.),\quad y_I^{\gamma},\quad y_{II}^{\gamma}(.)\right)$$

chấp nhận được. Ngoài ra do $v_{is}^{\gamma}(t) \xrightarrow{\gamma\to\infty} \tilde{v}_{is}^{\gamma}(t)$, $i = \overline{1, 4}$, $s \in S$

và $y_I^{\gamma} = \tilde{y}_I^{\gamma}$, $y_{II}^{\gamma}(t) = \tilde{y}_{II}^{\gamma}(t)$ nên

$$\lim_{\gamma\to\infty} L_2\left(v_{1s}^{\gamma}(t),\ s \in S,\ v_{2s}^{\gamma},\ s \in S,\ v_3^{\gamma}(t),\ v_4^{\gamma}(t),\ y_I^{\gamma},\ y_{II}^{\gamma}(t)\right) =$$

$$= \lim_{\gamma\to\infty} L_2\left(\tilde{v}_{1s}^{\gamma}(t),\ s \in S,\ \tilde{v}_{2s}^{\gamma}(t),\ s \in S,\ \tilde{v}_3^{\gamma}(t),\ \tilde{v}_4^{\gamma}(t),\ \tilde{y}_I^{\gamma},\ \tilde{y}_{II}^{\gamma}(t)\right) = L_1(u^o(t)).$$

Như vậy trong mọi trường hợp:

$$\lim_{\gamma\to\infty} \beta(\lambda,\ u^{\varepsilon}(.),\ v_{1s}(.),\ s \in S,\ v_{2s}(.),\ s \in S,\ v_3(.),\ v_4(.),\ y_I,\ y_{II}(.) \leqslant \varepsilon =$$

$$= \lim_{\gamma\to\infty} \left[L_1(u^{\varepsilon}(.) - L_2(v_{1s}(.),\ s \in S,\ v_{2s}(.),\ s \in S,\ v_3(.),\ v_4(.),\ y_I,\ y_{II}(.))\right] =$$

$$= L_1(u^{\varepsilon}(.) - L_1(u^o(.)) \leqslant \varepsilon$$

Ta đã chứng minh xong định lý.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ГАБАСОВ Р., КИРИЛОВА Ф.М., КОСТЮКОВА О. И., Прямой точный метод оптимизации линейной динамической системы со многими входами – АИТ 1986, N° 2, с. 6 – 13.

2 ГАБАСОВ Р., КИРИЛОВА ф. М., Методы линеиного програмирования. Часть I. Общие задачи: Изд – во БГУ, 1977. – 176 с.

3.ТЕР – КРИКОЛОВ А. М., Оптимальное управление и математическая эко. номика. М.: Наука, 1977, – 216с.

4. НГУЕН ЧАН., Методы решения задачи оптимального управления линейными системами с критерием качества типа минимакса – Изв. АН БССР Сер. физ – мат наук, 1986, N° 3, с. 32 –37.

ABSTRACT

Estimating suboptimal solutions to minimax problems for linear multi – input control systems by dual method

It's difficult to estimate suboptimality of minimax problems for linear systems. The estimate by dual method has proved to be effective. Here a result for linear multi – input sysstems in shown.