TẠP CHÍ KHOA HỌC TÍNH TOÁN VÀ ĐIỀU KHIỂN TẬP V (1989), SỐ I (1-4)

ĐÁNH GIÁ CHÍNH XÁC CHUẨN CỦA MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO TRONG HỆ PHƯƠNG TRÌNH XÁC ĐỊNH Spline loại IV

Hoàng Văn Lai
Viện Khoa học tính toán và Điều khiển

Những năm gần đây Spline được sử dụng rất nhiều trong giải tích số(xem[1], [2], [3]), bởi vì Spline là công cụ nội suy có độ chính xác cao, quá trình tính toán để xây dựng Spline lại rất đơn giản, đặc biệt là trong trường hợp Spline bậc ba. Trong trường hợp này Spline còn có một đặc tính tốt nữa là sai số ở một khu vực nào đó ảnh hưởng rất ít đến các khu vực khác. Sở dĩ Spline bậc ba có đặc tính này là vì ma trận trong hệ phương trình xác định nó là ma trận ba đường chéo trội. Thật vậy, cho một lưới đều Δ trên đoạn [a,b]

$$\Delta = \{ a = x_0, x_1, \dots, x_n = b \},\ x_i = x_{i-1} + h,\ i = 0,1,\dots, n,\ h = \frac{b-a}{n}\ ;\quad x_i = x_{i-1} + h$$

Cho giá trị của hàm f(x) trên lưới Δ : $f(x_i)$, $i = 0,1,\dots, n$. Khi đó ma trận $A_m^{(j)}$ trong hệ phương trình xác định Spline S(x) bậc ba, nội suy hàm f(x) trên lưới Δ có dạng sau:

$$A_m^{(j)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(j)} & \beta^{(j)} & & \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ & & \delta^{(j)} & \gamma^{(j)} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Ở đây j đặc trưng cho loại cua Spline (xem [1]) j = I, II, IV; m là số chiều của ma trận $A_m^{(j)}$. Với ma trận $A_m^{(j)}$ dạng (1) thì hệ phương trình

$$A_m^{(j)} \overline{x} = \overline{f},\ \overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m),\ f = (f_1, f_2, \dots, f_m) \qquad (2)$$

có thể giải bằng phương pháp truy đuổi (xem [2]). Thật vậy, từ phương trình đầu của (2) ta có:

$$x_1 = p_1 x_2 + q_1,\ p_1 = p_1^{(j)} = -\frac{\beta^{(j)}}{\alpha^{(j)}},\ q_1 = q_1^{(j)} = \frac{f_1}{\alpha^{(j)}} \qquad (3)$$

Bây giờ ta đặt:

$$x_i = p_i x_{i+1} + q_i,\ i = 1,2,\dots, m-1. \qquad (4)$$

Khi đó:

$$p_i = \frac{1}{4 + p_{i-1}},\ q_i = -p_i(f_i - q_{i-1}), i = 2,3,..,m-1. \qquad (5)$$

Khi ma trận $A_m^{(j)}$ có dạng (1) ở [4] đã chứng minh rằng sai số ở một khu vực ảnh hưởng rất ít đến các khu vực khác.

Trong trường hợp Spline loại I (hoặc loại II), tức là cho trước f'(a) và f'(b) (hoặc cho trước f''(a) và f''(b)) ta có $\alpha^{(j)} = \gamma^{(j)} = 4$, $\beta^{(j)} = \delta^{(j)} = 1$, $m = n-2$. Khi đó ma trận $A_m^{(j)}$ có tính đường chéo trội, cho nên tồn tại ma trận $(A_m^{(j)})^{-1}$. Nếu chúng ta lấy chuẩn của véc tơ theo công thức sau:

$$\| \overline{f} \| = \max_{i=1,2,\dots,m} | f_i | \quad \text{ta sẽ có (xem [2])}$$

$$\| (A_m^{(j)})^{-1} \| = \frac{1}{2},\ j = I, II \qquad (6)$$

Trong trường hợp không có thông tin về đạo hàm của hàm f(x) ta phải sử dụng Spline loại IV, tức là điều kiện nội suy các giá trị đạo hàm tại các điểm $a = x_0$, $b = x_m$ được thay bằng điều kiện liên tục của S'''(x) tại các điểm x_1 và x_{n-1}.

Khi đó $\alpha^{IV} = \gamma^{IV} = 2$, $\beta^{IV} = \delta^{IV} = 1$, $m = n-4$. Ma trận $(A_m^{IV})^{-1}$ vẫn tồn tại, nhưng chúng ta chỉ có đánh giá

$$\| (A_m^{IV})^{-1} \| < 1 .$$

Sau đây chúng ta sẽ chứng minh rằng với $m > 1$

$$\| (A_m^{IV})^{-1} \| < 1.$$

Trước tiên ta xét trường hợp Spline loại I-IV, tức là trường hợp tại a ta biết f'(a) còn tại b thì không biết điều kiện biên nào. Khi đó $\alpha^{I-IV} = 4$, $\beta^{I-IV} = 1$, $\gamma^{I-IV} = 2$, $\delta^{I-IV} = 1$, $m = n-3$.

Định lý 1: $(A_m^{I-IV})^{-1}$ thỏa mãn đánh giá sau

$$\| (A_m^{I-IV})^{-1} \| < r = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \tag{7}$$

Chứng minh: Lấy một véc tơ $\overline{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$ bất kỳ với $|f_i| \leqslant 1$. Cho rằng $\overline{x}$ là nghiệm của hệ phương trình

$$(A_m^{I-IV})\overline{x} = \overline{f} \tag{8}$$

Ta sẽ chứng minh rằng $\| x \| < r$. Thật vậy, ta giả thiết rằng $\| x \|$ đạt được tại thành phần thứ k của véc tơ $\overline{x}$, tức là:

$$\| x \| = | x_k | = \max_{i=1,2,...,m} | x_i |$$

Trước hết xét trường hợp $k = 1$. Từ phương trình đầu của hệ (8) ta có

$|x_1| = (1/4)|f_1 - x_2| \leqslant (1/4)| f_1 | + (1/4)|x_2| \leqslant (1/4) + (1/4)|x_1|$

Vì vậy $|x_1| \leqslant 1/3 < r$.

Bây giờ ta xét trường hợp $1 < k < m$. Khi đó từ phương trình thứ k của hệ (8) ta có:

$|x_k| = (1/4)|f_k - x_{k-1} - x_{k+1}| \leqslant (1/4)|f_k| + (1/4)|x_{k-1}| + (1/4)|x_{k+1}| \leqslant 1/4 + (1/2)|x_k|$

Vì vậy $|x_k| \leqslant 1/2 < r$.

Cuối cùng ta xét trường hợp $k = m$. Chúng ta chỉ cần xét trường hợp $|x_{m-1}| < |x_m|$, vì rằng nếu $|x_{m-1}| = |x_m| = \|x\|$ ta lại trở về trường hợp $1<k<m$. Ở đây chúng ta không thể đánh giá ngay x_m từ phương trình cuối của hệ (8) được, vì làm như thế chúng ta chỉ thu được $|x_m| < 1$.

Vì vậy chúng ta cần đánh giá x_{m-1} chính xác hơn. Từ các công thức (3),(4),(5) ta sẽ chứng minh rằng:

$$|x_{m-1}| < (2-\sqrt{3})\,|x_m| + \frac{1}{1+\sqrt{3}} \tag{9}$$

Thât vậy, bằng quy nạp ta chứng minh rằng trong trường hợp

$\alpha^{I-IV} = 4$, $\beta^{I-IV} = 1$ ta có:

$$|p_i| < 2 - \sqrt{3} = r_1, \quad |q_i| < \frac{1}{1+\sqrt{3}} = r_2, \qquad i = 1, 2, \cdots, m-1 \tag{10}$$

Với $i = 1$, ta có $|p_1^{I-IV}| = 1/4$, $|q_1^{I-IV}| = (1/4)|f_1| \leqslant 1/4$.

Vì vậy $|p_1^{I-IV}| < r_1$, $|q_1^{I-IV}| < r_2$. Giả thiết rằng (10) đã được chứng minh cho $i-1$, $i \geqslant 2$. Khi đó

$$|p_i| = \frac{1}{|4-p_{i-1}|} \leqslant \frac{1}{4-|p_{i-1}|} < \frac{1}{2+\sqrt{3}} = r_1$$

$$|q_i| = |p_i|\,|f_i - q_{i-1}| \leqslant (2-\sqrt{3})(1+\frac{1}{1+\sqrt{3}}) = \frac{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}} = r_2$$

Nhờ đánh giá (9) ta đánh giá chính xác hơn x_m. Thật vậy, từ phương trình cuối cùng của (8) ta có

$$2\,|x_m| = |f_m - x_{m-1}| = |f_m - (p_{m-1}x_m + q_{m-1})| < 1 + (2-\sqrt{3})\,x_m + \frac{1}{1+\sqrt{3}}.$$

Vì vậy $|x_m| < \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right) = r$. Định lý 1 đã được chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh rằng tuy đánh giá (7) không được chính xác như đánh giá (6) và đánh giá (14) sau này, nhưng sai số ở đây, khi m đủ lớn, là rất nhỏ. Thật vậy, từ (5) và phương pháp biểu diễn phân số dây chuyền (xem [5]) ta có:

$$p_l = -\frac{r_3^{l-1} + \varphi^{(l)} r_4^{l-1}}{r_3^{l} + \varphi^{(l)} r_4^{l}}, \quad l = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

với $r_3 = 2 + \sqrt{3}$; $r_4 = 2 - \sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - 4x + 1 = 0$, $\varphi^{(l)}$ được chọn sao cho $(1 + \varphi^{(l)}) / (r_3 + \varphi^{(l)} r_4) = p_1^{(l)}$. Trong trường hợp $p_1^{I-IV} = -1/4$ ta có

$$\varphi^{I-IV} = -\frac{4 + r_3}{4 + r_4} < 0$$

Từ (11) suy ra rằng

$$p_l = -r_1 \frac{1 + \varphi^{I-IV} r_5^{l-1}}{1 + \varphi^{I-IV} r_5^{l}}, \quad r_1 = 2 - \sqrt{3}, r_5 = \frac{r_4}{r_3}$$

vì rằng $-1 < \varphi^{I-IV}, r_5^l < 0$ cho nên

$$0 < \frac{1 + \varphi^{I-IV} r_5^{l-1}}{1 + \varphi^{I-IV} r_5^{l}} < 1$$

$$|p_l| = r_1 \left(\frac{1 + \varphi^{I-IV} r_5^{l-1}}{1 + \varphi^{I-IV} r_5^{l}}\right), \quad l = 1, 2, \ldots, m-1 \tag{12}$$

Từ đẳng thức (12) suy ra rằng khi $l = m-1$ đánh giá (10) là chính xác tới đại lượng r_5^{m-2}. Khi m là một số lớn thì đây là một đại lượng rất nhỏ.

Bây giờ ta xét trường hợp Spline loại IV.

<u>Định lý 2</u>. $(A_m^{IV})^{-1}$ thoả mãn đánh giá sau:

$$\|(A_m^{IV})^{-1}\| = r_6 = r_6(m) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r_3^{m-1} + r_4^{m-1} + 2}{2r_3^{m-1} + 2r_4^{m-1} - r_3^{m-2} - r_4^{m-2}}\right) \tag{13}$$

<u>Chứng minh</u> Trước hết chúng ta nhận xét rằng trong trường hợp

$p_1^{IV} = -\frac{1}{2}$ ta có $\varphi^{IV} = 1$. Như vậy $p_l = -\dfrac{r_3^{l-3} + r_4^{l-4}}{r_3^{l} + r_4^{l}}, \quad l = 1, 2, \ldots, m-1$ (14)

Bằng quy nạp ta chứng minh

$$q_l \leqslant \frac{1}{r_3^l + r_4^l}\left(\frac{r_3^l - 1}{r_3 - 1} + \frac{1 - r_4^l}{1 - r_4}\right), \quad l = 1, 2, \ldots, m-1 \tag{15}$$

Thật vậy, vì rằng $r_3 + r_4 = 4$ cho nên ta có ngay (15) trong trường hợp $l = 1$. Bây giờ ta giả thiết rằng (15) đã được chứng minh cho $l-1$, $l \geqslant 2$. Khi đó từ (5) và (14) ta có

$$|q_l| = |p_l|\,|f_l - q_{l-1}| \leqslant |p_l|(1 + |q_{l-1}|) \leqslant \frac{r_3^{l-1} + r_4^{l-1}}{r_3^l + r_4^l}\left[1 + \frac{1}{r_3^{l-1} + r_4^{l-1}}\left(\frac{r_3^{l-1} - 1}{r_3 - 1} + \frac{1 - r_4^{l-1}}{1 - r_4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r_3^l + r_4^l}\left[r_3^{l-1} + \frac{r_3^{l-1} - 1}{r_3 - 1} + r_4^{l-1} + \frac{1 - r_4^{l-1}}{1 - r_4}\right]$$

$$= \frac{1}{r_3^l + r_4^l}\left(\frac{r_3^l - 1}{r_3 - 1} + \frac{1 - r_4^l}{1 - r_4}\right)$$

Cũng như trong chứng minh định lý 1, ta lấy một véc tơ $\bar{f}$ bất kỳ với $\|\bar{f}\| = 1$. Cho rằng $\bar{x}$ là nghiệm của hệ phương trình

$$(A_m^{IV})\,\bar{x} = \bar{f} \tag{16}$$

Ta cần chứng minh rằng $\|\bar{x}\| \leqslant r_6$. Thật vậy, giả thiết rằng $\|\bar{x}\|$ đạt được tại thành phần thứ k. Khi đó, nếu $1 < k < m$ ta có $\|\bar{x}\| = |x_k| <= 1/2 < r_6$. Bây giờ ta xét trường hợp $k = m$. Từ phương trình cuối cùng (16), (4) và (15) ta có

$$2|x_m| = |f_m - x_{m-1}| \leqslant 1 + |p_{m-1}|\,|x_m| + |q_{m-1}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r_3^m + r_4^{m-2}}{r_3^{m-1}+r_4^{m-1}}|x_m| + 1 + \frac{1}{r_3^{m-1}+r_4^{m-1}}\left(\frac{r_3^{m-1}-1}{r_3-1} + \frac{1-r_4^{m-1}}{1-r_4}\right)$$

Vì vậy $|x_m| = \frac{1}{2}\left(1+\frac{r_3^{m-1}+r_4^{m-1}+2}{2r_3^{m-1}+2r_4^{m-1}-r_3^{m-2}-r_4^{m-2}}\right) = r_6$

Trong trường hợp $k=1$ ta cần thực hiện thuật toán truy đuổi theo chiều giảm dần, tức là biểu diễn x_i qua x_{i-1}. Việc chứng minh bất đẳng thức $|x_1| \leqslant r_6$ hoàn toàn tương tự như trường hợp $k=m$. Như vậy ta đã chứng minh rằng

$$\|(A^{IV})^{-1}\| \leqslant r_6$$

Bây giờ ta lấy $|\bar{f}| = (1,-1,1,\ldots,(-1)^{m-1})$. Khi đó dễ dàng chứng minh được rằng $|q_i| = |p_i|(1+|q_{i-1}|)$, vì vậy $|x_m| = r_6$. Từ đẳng thức này ta suy ra đẳng thức (13).

Định lý 2 đã chứng minh xong.

Trong phần cuối của bài báo này chúng ta nhận xét rằng đánh giá (13) xấu hơn các đánh giá (6) và (7) vì nó phụ thuộc vào m. Bây giờ ta viết $r_6 = r_6(m)$ về dạng sau:

$$r_6(m) = \frac{1}{2}\left[1 + r_3\frac{1 + r_5^{m-1} + 2/r_3^{m-1}}{(2r_3-1) - r_5^{m-2}(1-2r_4)}\right]$$

Vì rằng $0 < r_3$, $2r_3 - 1 > 0$, $1-2r_4 > 0$, $0 < r_5 < 1$ o nên $r_6(m)$, $m=1,2,\ldots$ giảm dần theo m và

$$\lim_{m\to\infty} r_6(m) = \frac{3r_3-1}{2r_3-2} = r.$$

Do $r_6(m)$ giảm dần theo m, cho nên chúng ta không dùng r để đánh giá $(A_m^{IV}$ ... làm việc này chúng ta chỉ có thể dùng $r_6(2) = 1$, $r_6(3) = 5/6$, $r_6(4) = 71/90,\ldots$

Nhận ngày ... -1987

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Xchetrkin C.B., Spline trong toán học tính toán (tiếng Nga), 1976
2. Davialov I.C., Phương pháp Spline(tiếng Nga), 1980
3. Kopnheitrue P., Spline(tiếng Nga), 1984.
4. Diatrenko, Cơ sở phương pháp tính(tiếng Nga), 1972
5. Khintrin A.I., Phân số dây chuyền(tiếng Nga), 1978.

ABSTRACT

THE EXACT BOUND OF INVERSE MATRIX IN THE SYSTEM OF EPIATIONS FOR SPLINE TYPE IV.

Consider here the ease of interpolating spline S(x) for function f(x) at the points x0, x1,..., xm one has to use the conditions of continuity of S'''(x) at the points x1,xm-1. For Spline of this type the exact bounds of inverse matrix are obtained by using the technique of three diagonal systems.