TẠP CHÍ KHOA HỌC TÍNH TOÁN VÀ ĐIỀU KHIỂN TẬP VI (1990), Số 3 (7-10)

VỀ HIỆU CHỈNH BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRONG KHÔNG GIAN $L_p(\Omega)$

NGUYỄN BƯỜNG

1. Mục đích của bài này là đưa ra một phương pháp tiệm cận mới cho bài toán hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach.

Cho Ω là một tập mở, giới nội với biên đủ trơn $\Gamma\Omega$ của R^n. Xét bất đẳng thức biến phân sau :

$$\langle Tu_0 + F(u_0) - f_0, u - u_0\rangle \geq 0,\ \forall u \in K,\ u_0 \in K \tag{1}$$

ở đây

$$Tu = \sum_{1\leq|\beta|\leq 2m} a_\beta(x)D^\beta u,\ a_\beta(x) \in C(\overline{\Omega})$$

$$(-1)^m \sum_{|\beta|=2m} a_\beta(x)\xi^\beta \geq m_T|\xi|^{\beta 2m} \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ \xi \in R^n \tag{2}$$

$m \in N$, $m_T \geq 0$, $F(t)$ là một hàm liên tục thỏa mãn điều kiện

$$|F(t)| \leq a_0 + b_0|t|^{p-1},\ t \in R^1,\ a_0, b_0 > 0,\ p > 1,$$

$$F(t_1) \leq F(t_2),\ t_1 \leq t_2,$$

$f_0 \in L_q(\Omega)$, $p^{-1}+q^{-1} = 1$, $\langle\varphi^*, \varphi\rangle = \varphi^*(\varphi)$ với mỗi $\varphi^* \in L_p(\Omega), \varphi \in L_q(\Omega)$ hoặc $\varphi^* \in L_q(\Omega), \varphi \in L_p(\Omega)$.

Ta giả thiết là giữa bậc vi phân m và số chiều n của R^n thỏa mãn điều kiện sau:

$q > 1$ nếu $n - 2m \leq 0$; $\quad q > \frac{2n}{n+2m}$ nếu $n - 2m > 0$

$K \subset V$ là một tập đóng và lồi trong $L_p(\Omega)$, ở đây V là bao đóng trong metric $W_q^{2m}(\Omega)$ tập tất cả các hàm thuộc $C^{2m}(\Omega)$ thỏa mãn điều kiện

$$D_\nu^r u(x)|_{\Gamma\Omega} = 0 \qquad 0 \leq |r| \leq n - 1$$

$D_\nu^r u$ là đạo hàm bậc r theo hướng pháp tuyến trong của $\Gamma\Omega$.

Trường hợp $K = V$ và $m_T > 0$ bài toán (1) được xét trong [1, 2]. Nếu $m_T = 0$ thì (1) thuộc vào lớp bài toán không chính qui với toán tử đơn điệu $T + F$ được nghiên cứu gần đây trong [3 - 5]. Trong các công trình kể trên người ta đã sử dụng ánh xạ đối ngẫu của không gian Banach $L_p(\Omega)$ để xây dựng thuật toán hiệu chỉnh.

Việc dùng ánh xạ đối ngẫu, trong trường hợp này là

$$U(u) = \|u\|^{2-p}_{L_p(\Omega)}|u(x)|\mathrm{Sgn}\,u(x)$$

đã làm thay đổi tính chất phi tuyến của bài toán. Từ toán tử vi phân $\mathcal{T} + F$ ta đã xây dựng một toán tử vi tích phân phi tuyến. Ở đây, với bài toán trên, ta đưa ra một thuật toán hiệu chỉnh mới, có các kết quả tương tự như trong [3 – 5], nhưng tính chất của bài toán được bảo toàn.

2. Xét bài toán vi phân $\tilde{\mathcal{T}} u$ với các hệ số $\tilde{a}_\beta(x)$ được xác định như sau:

$$\tilde{a}_\beta(x) = \begin{cases} -1_\beta & |\beta| = 2m \\ 0 & 1 \leq |\beta| \leq 2m - 1 \end{cases}$$

1_β là ma trận đơn vị. Khi đó, dễ dàng thấy được $\tilde{a}_\beta(x)$ thỏa mãn (2) với $m_{\tilde{\mathcal{T}}} > 0$.

Trước tiên ta lưu ý là u_0 thỏa mãn (1) khi và chỉ khi

$$\langle \mathcal{T} u + F(u) - f_0, u - u_0\rangle \geq 0,\ \forall u \in K,\ u_0 \in K$$

Vì vậy dễ thấy được tập tất cả các nghiệm của (1), ký hiệu là S_0, là tập đóng và lồi trong $L_p(\Omega)$.

Xét bất đẳng thức biến phân sau:

$$\langle \tilde{\mathcal{T}}_\alpha u_\alpha + F(u_\alpha) - f_0, u - u_0\rangle \geq 0,\ \forall u \in K,\ u_\alpha \in K \tag{3}$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_\alpha = \mathcal{T} + \alpha\tilde{\mathcal{T}}$$

Định lý 1. Với mỗi $\alpha > 0$ bất đẳng thức biến phân (3) có một nghiệm duy nhất $u_\alpha(x)$. Cho $\alpha \to 0, \{u_\alpha\}$ hội tụ khi và chỉ khi $S \neq \emptyset$.

Chứng minh: Với mỗi $\alpha > 0$ toán tử $\tilde{\mathcal{T}}_\alpha$ là một toán tử đơn điệu mạnh và cực đại, vì

$$\langle \tilde{\mathcal{T}}_\alpha u, u\rangle \geq \alpha\langle \tilde{\mathcal{T}} u, u\rangle \geq \alpha \overline{m}_{\tilde{\mathcal{T}}} \|u\|^2_{L_p(\Omega)},\ \forall u \in V,$$

$\overline{m}_{\tilde{\mathcal{T}}} > 0$ – hằng số. Do đó $\tilde{\mathcal{T}}_\alpha + F$ cũng là một toán tử đơn điệu mạnh và cực đại. Vì thế (3) có duy nhất nghiệm $u_\alpha(x)$ với mỗi $\alpha > 0$.

Bây giờ ta giả thiết $S_0 \neq \emptyset$. Từ (1) và (3) ta có

$$\langle \mathcal{T} u_\alpha + \alpha\tilde{\mathcal{T}} u_\alpha + F(u_\alpha) - f_0, u_0 - u_\alpha\rangle \geq \langle \mathcal{T} u_0 + F(u_0) - f_0, u_0 - u_\alpha\rangle,\ u_0 \in S_0,$$

suy ra

$$\langle \tilde{\mathcal{T}} u_\alpha, u_\alpha - u_0\rangle \leq 0,\ \forall u_0 \in S_0$$

và

$$\langle \tilde{\mathcal{T}} u_0, u_0 - u_\alpha\rangle \geq \overline{m}_{\tilde{\mathcal{T}}} \|u_0 - u_\alpha\|^2_{L_p(\Omega)} \tag{4}$$

Vì thế cho nên tập $\{u_\alpha\}$ là giới nội trong $L_p(\alpha)$.

Gọi $\{u_{\tilde{\alpha}}\}$ là một dãy con hội tụ yếu đến một phần tử $\overline{u}_0 (\in K)$ của dãy $\{u_\alpha\}$.

Mặt khác vì $u_{\tilde{\alpha}}$ là nghiệm của (3) với $\alpha = \tilde{\alpha}$ cho nên

$$\langle \tilde{\mathcal{T}}_{\tilde{\alpha}} u + F(u) - f_0, u - u_{\tilde{\alpha}}\rangle \geq 0 \quad \forall u \in K,\ u_{\tilde{\alpha}} \in K$$

Cho $\tilde{\alpha} \to 0$ ta được

$$\langle \tilde{T} u + F(u) - f_0, u - \overline{u}_0 \rangle \geq 0 \quad \forall u \in K$$

Như vậy $\overline{u}_0 \in S_0$. Từ (4) ta có dãy $\{u_\alpha\}$ hội tụ mạnh đến $\overline{u}$ khi $\alpha \to 0$ và

$$\langle \tilde{T} u, u - \overline{u}_0 \rangle \geq 0 \quad \forall u \in S_0$$

Vì $\tilde{T}$ là toán tử đơn điệu mạnh, S_0 là một tập đóng và lồi, cho nên phần tử $\overline{u}_0$ được xác định một cách duy nhất. Do đó cả dãy $\{u_\alpha\}$ hội tụ mạnh đến $\overline{u}_0$. Dễ dàng nhận thấy là nếu $\{u_\alpha\}$ hội tụ đến u_0 thì u_0 là nghiệm của (1), tức là $S_0 \neq \emptyset$. Định lý được chứng minh.

Bây giờ xét trường hợp thay cho $f_0(x)$ ta chỉ biết $f_\delta(x) \in L_q(\Omega)$ là xấp xỉ của $f_0(x)$: $\|f_\delta - f_0\|_{L_q(\Omega)} \leq \delta \to 0$.

Định lý 2. Với mỗi $\alpha > 0$ và $\mu \geq 0$ bất đẳng thức biến phân sau

$$\langle \tilde{T}_{\alpha+\mu} u_\alpha^\gamma + F(u_\alpha^\gamma) - f_\delta, u - u_\alpha^\gamma \rangle \geq 0, \ \forall u \in K, \ u_\alpha^\gamma \in K, \tag{5}$$

có duy nhất nghiệm u_α^γ, $\gamma = (\mu, \delta)$. Nếu dãy $\{\mu/\alpha\}$ và $\{\delta/\alpha\}$ tiến tới 0 khi $\alpha \to 0$ thì dãy $\{u_\alpha^\gamma\}$ hội tụ đến nghiệm của (1) khi và chỉ khi $S_0 \neq \emptyset$.

Chứng minh: Từ (1) và (5) ta có $\langle \tilde{T} u_\alpha^\gamma, u_\alpha^\gamma - u_0 \rangle \leq \frac{\delta}{\alpha} \|u - u_0\|_{L_p(\Omega)}$, hoặc

$$\overline{m}_{\tilde{T}} \|u_\alpha^\gamma - u_0\|_{L_p(\Omega)}^2 \leq \langle \tilde{T} u_0, u_0 - u_\alpha^\gamma \rangle + \frac{\delta}{\alpha} \|u_\alpha^\gamma - u_0\|_{L_p(\Omega)} \tag{6}$$

Vì vậy dãy $\{u_\alpha^\gamma\}$ là giới nội. Phần còn lại của chứng minh là lặp lại các bước của chứng minh định lý 1.

Định lý 3. Với mỗi $\gamma > 0$ cố định tồn tại ít nhất một giá trị $\overline{\alpha}$ của tham số α sao cho

$$\rho(\overline{\alpha}) = (\mu + \delta)^{\tilde{p}} \quad 0 < \tilde{p} < 1, \tag{7}$$

với $\rho(\alpha) = \alpha(\|u_\alpha^\gamma\|_{L_p} + \overline{a}_0)$, $\overline{a}_0 > 0$ và các dãy $\{\mu/\overline{\alpha}\}, \{\delta/\overline{\alpha}\} \to 0$, khi $\gamma \to 0$.

Chứng minh: Đầu tiên ta chứng minh hàm $\rho(\alpha)$ liên tục trong $(0, +\infty)$ và

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \rho(\alpha) = +\infty, \quad \lim_{\alpha \to +0} \rho(\alpha) = 0$$

Thật vậy, với α_i, $i = 1, 2$, là các số dương sao cho $\alpha_2 > \alpha_1 \geq \alpha_0$. Từ (5) ta có

$$\langle \alpha_1 \tilde{T} u_{\alpha_1}^\gamma - \alpha_2 \tilde{T} u_{\alpha_2}^\gamma, u_{\alpha_1}^\gamma - u_{\alpha_2}^\gamma \rangle \leq 0$$

hoặc

$$\langle \tilde{T}(u_{\alpha_1}^\gamma - u_{\alpha_2}^\gamma), u_{\alpha_1}^\gamma - u_{\alpha_2}^\gamma \rangle \leq \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_0} \langle \tilde{T} u_{\alpha_2}^\gamma, u_{\alpha_1}^\gamma - u_{\alpha_2}^\gamma \rangle,$$

với $u_{\alpha_i}^\gamma$ là nghiệm của (5) với $\alpha = \alpha_i$.

Trong trường hợp chung của α_i ta có

$$\overline{m}_{\tilde{T}} \|u_{\alpha_1}^\gamma - u_{\alpha_2}^\gamma\|_{L_p(\Omega)} \leq \frac{|\alpha_2 - \alpha_1|}{\alpha_0} \|\tilde{T} u_{\alpha_2}^\gamma\|_{L_q(\Omega)}$$

Vì thế cho nên $\rho(\alpha)$ là một hàm liên tục trong $(0, +\infty)$.

Dễ dàng nhận thấy là $\lim_{\alpha\to+\infty} \rho(\alpha) = +\infty$. Mặt khác từ (5) ta cũng có

$$\overline{m}_{\tilde{T}} \|u_\alpha^\gamma - u^\gamma\|_{L_p(\Omega)} \leq \|\tilde{T} u^\gamma\|_{L_q(\Omega)},$$

ở đây u^γ là nghiệm của (5) với $\alpha = 0$ và $\mu > 0$. Vì thế ta có dãy $\{u_\alpha^\gamma\}$ là giới nội với mọi $\gamma > 0$ cố định. Do đó $\lim_{\alpha\to+0} \rho(\alpha) = 0$.

Từ tính chất của hàm $\rho(\alpha)$ suy ra tồn tại $\overline{\alpha}$ thỏa mãn (7). Cũng từ (6) ta còn có

$$\frac{\mu+\delta}{\overline{\alpha}} = (\mu+\delta)^{1-\beta}(\|u_{\overline{\alpha}}^\gamma\|_{L_p(\Omega)} + \overline{a}_0) \tag{8}$$

Từ (1) và (5) ta nhận được

$$\overline{m}_{\tilde{T}} \|u_{\overline{\alpha}}^\gamma - u_1\|_{L_p(\Omega)} \leq \frac{\mu\|\tilde{T} u_1\|_{L_q(\Omega)} + \delta}{\overline{\alpha}} + \|\tilde{T} u_1\|_{L_q(\Omega)}$$

Từ đây và (8) suy ra

$$\frac{\mu+\delta}{\overline{\alpha}}\left(1 - (\mu+\delta)^{1-\beta} max(1, \|\tilde{T} u_1\|_{L_q(\Omega)}\overline{m}_{\tilde{T}}^{-1})\right) \leq (\mu+\delta)^{1-\beta}(\|u_1\|_{L_p(\Omega)} + \|\tilde{T} u_1\|_{L_q(\Omega)} + \overline{a}_0)$$

Vì vậy ta có

$$\lim_{\gamma\to 0} \frac{\mu}{\overline{\alpha}(\gamma)} = \lim_{\gamma\to 0} \frac{\delta}{\overline{\alpha}(\gamma)} = 0$$

Định lý được chứng minh.

Nhận ngày 1-12-1989

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Pavlenko V. N., Ucrain's Math. Journal V.31, 1979, No.5, 569–572.

2. Ramm A. G., Math. Narch. V.92, 1979, 13–20.

3. Riazanseva I. P., Journal of numerical math. and math. physics URSS V.23, 1983, 479–483.

4. Riazanseva I. P., Journal of numerical math. and math. physics URSS V.24, 1984, 1892–1896.

5. Riezanseva I. P., Bull. of higher Inst. 1985, No.4, 55–57.

ABSTRACT

ON REGULARIZATION FOR VARIATIONAL INEQUALITY IN $L_p(\Omega)$

The new approach in the theory of regulization for variational inequality with monotone operator in Banach space is presented in $L_p(\Omega)$ by using a linear and strongly monotone operator in place of duality mapping.