*Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T.22, S.3 (2006), 221–228*

# SỐ ĐỒ THỊ HAMILTON TỐI ĐẠI

VŨ ĐÌNH HÒA[1], ĐỖ NHƯ AN[2]

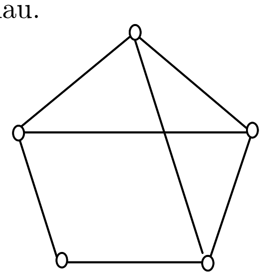
[1]*Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội*
[2]*Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Nha Trang*

**Abstract.** A graph is called a *maximal uniquely Hamiltonian graph* if it has the maximum number of edges among the graphs with the same number of vertices and exact one Hamiltonian cycle. In this paper, we prove the conjecture posed in [5] that for every $n \geq 7$ there are exactly $2^{[\frac{n-7}{2}]}$ maximal uniquely Hamiltonian graphs.

**Tóm tắt.** Một đồ thị được gọi là đồ thị Hamilton tối đại nếu như nó có số cạnh nhiều nhất có thể trong các đồ thị có cùng số đỉnh và có đúng một chu trình Hamilton. Trong bài này, chúng tôi chứng minh giả thuyết được nêu trong [5] rằng có đúng $2^{[\frac{n-7}{2}]}$ đồ thị Hamilton tối đại $n \geq 7$ đỉnh.

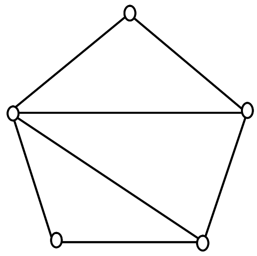
## 1. MỞ ĐẦU

Trong bài báo này, chúng ta chỉ nói đến các đồ thị hữu hạn vô hướng. Một đồ thị $G$ được ký hiệu $G = (V, E)$ với $V$ là tập hợp đỉnh và $E$ là tập hợp cạnh của $G$. Đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ được nói là *đồ thị con* của đồ thị $G_2 = (V_2, E_2)$ nếu như $V_1 \subseteq V_2$ và $E_1 \subseteq E_2$. Đồ thị con $G_1 = (V_1, E_1)$ của đồ thị $G_2 = (V_2, E_2)$ được gọi là *đồ thị thành phần* của $G_2$ nếu như mỗi cạnh $e = (x, y)$ của $G_2$ với $x, y \in V_1$ cũng là cạnh của đồ thị $G_1$. Cho trước đồ thị $G = (V, E)$ và $S$ là tập hợp con của $V$, thì đồ thị thành phần của $G$ với tập đỉnh $S$ được gọi là *đồ thị sinh bởi* $S$ và được ký hiệu là $G[S]$. Ngoài ra, mọi ký hiệu và khái niệm khác ở đây đều được lấy từ [3]. Cho trước một đồ thị đơn vô hướng $G$, ta gọi một chu trình $C$ của $G$ là *chu trình Hamilton* nếu nó đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị $G$. Trong hình 1 ta có một đồ thị 5 đỉnh với hai chu trình Hamilton khác nhau.



*Hình 1.* Đồ thị 5 đỉnh có hai chu trình Hamilton

Đồ thị không có chu trình Hamilton với nhiều cạnh nhất, đã được nghiên cứu bởi Erdos [4] và một số nhà toán học khác. Nếu đồ thị $G$ có chu trình Hamilton thì nó được gọi là *đồ thị Hamilton*. Một đồ thị chỉ có đúng một chu trình Hamilton được gọi là *đồ thị Hamilton tối đại* nếu như nó có nhiều cạnh nhất trong số các đồ thị cùng số đỉnh và có đúng một chu trình Hamilton. Lớp các đồ thị này được nhiều nhà toán học nghiên cứu ($[1, 2, 5, 6]$). Hình 2 là đồ thị Hamilton tối đại 5 đỉnh.



*Hình 2.* Đồ thị Hamilton tối đại 5 đỉnh

Đối với đồ thị Hamilton tối đại, Sheehan [6] đã nghiên cứu bài toán tìm số cạnh nhiều nhất có thể của đồ thị $n$ đỉnh với duy nhất một chu trình Hamilton. Kết quả tương tự được Barefoot và Entringer [1] nghiên cứu cho lớp đồ thị có duy nhất một chu trình Hamilton và hai đỉnh không kề nhau bất kỳ của nó được nối với nhau bởi một đường Hamilton (đường chứa toàn bộ các đỉnh của đồ thị). Ta không xem xét lớp đồ thị đó ở đây.

Sheehan [6] chứng minh định lý sau:

**Định lý 1.** [Sheehan] *Đồ thị tối đại với $n$ đỉnh có đúng* $[\frac{n^2}{4}]+1$ *cạnh.*

Trong [5], chúng tôi đã chỉ ra rằng có ít nhất $2^{[\frac{n-7}{2}]}$ đồ thị Hamilton tối đại bằng thuật toán xác định đồ thị Hamilton tối đại $n$ đỉnh như sau.

**Định lý 2.** *Thuật toán sau đây cho ta ít nhất $2^{[\frac{n-7}{2}]}$ đồ thị Hamilton tối đại $n$ đỉnh không đẳng cấu với nhau.*

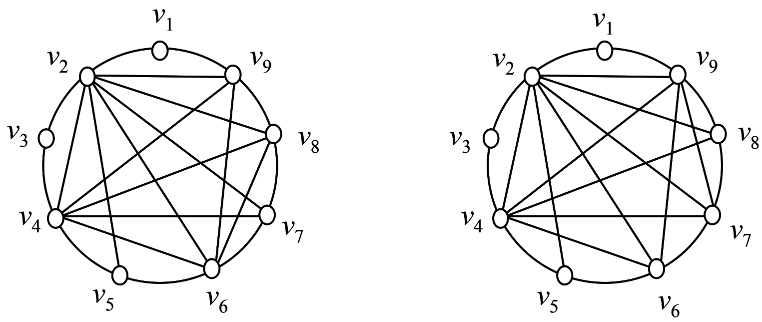
Xuất phát từ một chu trình $C$ có $n$ đỉnh. Ta chọn đỉnh $x_0$ tùy ý trên $C$ và xác định

$$X_1 = \{x_0\},$$
$$Y_1 = \emptyset.$$

Nếu tập đỉnh $X_i$ và $Y_i$ đã được xác định, thì ta xác định đỉnh $x_i \notin X_i$ sao cho tồn tại $x' \in X_i$ cách $x_i$ khoảng cách 2 dọc theo chu trình $C$, và $y_i$ là đỉnh kề với $x_i$ và $x'$ trên $C$. Tập hợp $X_{i+1}$ và $Y_{i+1}$ được xác định theo quy tắc sau:

$$X_{i+1} = X_i \cup \{x_i\},$$
$$Y_{i+1} = Y_i \cup \{y_i\},$$

với $i = 1, 2, \dots, [\frac{n}{2}]$. Đồ thị $G$ thu được bằng cách bổ sung vào $C$ các cạnh nối các đỉnh $y_i$ với tất cả các các đỉnh không thuộc $X_{i+1} \cup Y_{i+1}$. Chẳng hạn trong Hình 3, ta có hai đồ thị Hamilton tối đại 9 đỉnh không đẳng cấu.




*Hình 3.* Hai đồ thị Hamilton tối đại 9 đỉnh

Bằng thuật toán đã nêu trên, ta có ít nhất $2^{[\frac{n-7}{2}]}$ đồ thị Hamilton tối đại $n$ đỉnh cho mỗi giá trị $n \geqslant 7$. Trong [5], giả thuyết sau được đưa ra.

**Giả thuyết 1.** *Có đúng $2^{[\frac{n-7}{2}]}$ đồ thị Hamilton tối đại $n \geqslant 7$ đỉnh.*

Sau đây ta chứng minh rằng giả thuyết trên là đúng.

**Định lý 3.** *Có đúng $2^{[\frac{n-7}{2}]}$ đồ thị Hamilton tối đại $n \geqslant 7$ đỉnh.*

## 2. MỘT SỐ KÝ HIỆU VÀ KẾT QUẢ CƠ BẢN

Ký hiệu $h(n)$ là số cạnh của đồ thị Hamilton tối đại $n$ đỉnh. Các bổ đề dưới đây đã được Sheehan [6] chứng minh.

**Bổ đề 1.** ( Theorem 1 [6]) $h(n) = [\frac{n^2}{4}] + 1$.

Xét một đồ thị Hamilton tối đại $G$ với $n$ đỉnh. Ta ký hiệu các đỉnh của $G$ liên tiếp nhau trên chu trình Hamilton $C$ của $G$ là $v_1, v_2, \dots, v_n$. Mỗi cạnh $e$ của $G$ không thuộc $C$ còn được gọi là một *dây cung* của $C$. Ta có:

**Bổ đề 2.** (Lemma 2 [6]) *Hai dây cung $(v_i, v_{j+1})$, $(v_{i+1}, v_j)$ không đồng thời thuộc $G$.*

Cho trước một dây cung $e = (v_i, v_j)$, ta gọi *độ dài của dây cung* $e$ là độ dài của con đường ngắn nhất dọc theo $C$ nối 2 đỉnh của $e$, như vậy độ dài $\ell$ của dây cung $e$ tùy ý luôn là một số tự nhiên thỏa mãn $1 \leqslant \ell \leqslant \frac{n}{2}$. Ngược lại, với mỗi số tự nhiên $\ell$ thỏa mãn $1 \leqslant \ell \leqslant \frac{n}{2}$, ta ký hiệu $C(n : \ell)$ là tập hợp các dây cung có độ dài $\ell$.

**Bổ đề 3.** (Lemma 3 [6]) *Với mỗi $n$, ta có $|C(n : \ell)| \leqslant \frac{n}{2}$.*

Ngoài ra trong [6] cũng chứng minh:

**Bổ đề 4.** (Lemma 6 [6]) *Nếu $n$ là số chẵn, $\ell$ là số lẻ thỏa mãn $1 \leqslant \ell < \frac{n}{2}$ thì $|C(n : \ell)| < \frac{n}{2}$.*

**Bổ đề 5.** (Lemma 7 [6]) *Nếu $n$ là số chẵn thì $|C(n : \frac{n}{2})| \leqslant \frac{n}{4}$.*

Trong đồ thị Hamilton tối đại với đúng $[\frac{n^2}{4}] + 1$ cạnh, thì các bất đẳng thức được chứng minh trong các bổ đề trên trở thành đẳng thức, cho nên ta có:

**Bổ đề 6.** *Trong đồ thị Hamilton tối đại $G$ với $n$ đỉnh và $[\frac{n^2}{4}] + 1$ cạnh, ta có:*
a) *Nếu $n$ là số lẻ thì $G$ có $\frac{n-1}{2}$ dây cung độ dài $\ell \leqslant \frac{n}{2}$.*
b) *Nếu $n$ là số chẵn thì $G$:*
- *có đúng $\frac{n}{4}$ dây cung độ dài $\frac{n}{2}$ chẵn,*
- *có đúng $\frac{n}{2}$ dây cung độ dài chẵn $\ell \neq \frac{n}{2}$,*
- *có đúng $\frac{n}{2} - 1$ dây cung độ dài lẻ $\ell \neq \frac{n}{2}$.*

Để chứng minh Định lý 3, ta nghiên cứu cấu trúc các dây cung trong đồ thị Hamilton tối đại $G$.

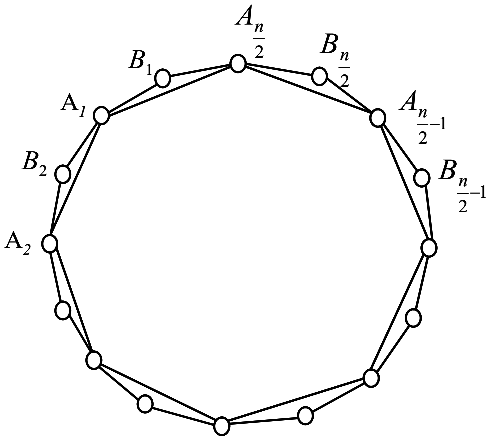
## 3. CẤU TRÚC ĐỒ THỊ HAMILTON TỐI ĐẠI

Cho trước đồ thị Hamilton tối đại $G$ với $[\frac{n^2}{4}] + 1$ cạnh, ta biểu diễn đồ thị $G$ có đỉnh tại đỉnh một $n$ giác đều và cạnh của chu trình Hamilton $C$ của $G$ là các cạnh của $n$ giác đều đã cho (Hình 4).

Ta có bổ đề sau đây:

**Bổ đề 7.** *Khi $n$ chẵn thì các đỉnh của các dây cung độ dài 2 sinh ra một đồ thị con đầy đủ $K_{\frac{n}{2}}$, các đỉnh còn lại sinh ra đồ thị $\bar{K}_{\frac{n}{2}}$ (là đồ thị có $\frac{n}{2}$ đỉnh và không có cạnh nào cả).*

**Chứng minh.** Theo Bổ đề 6 thì có đúng $\frac{n}{2}$ dây cung độ dài 2. Theo Bổ đề 2 thì các dây cung này tạo thành một đa giác đều $\frac{n}{2}$ cạnh. Ta đánh số các đỉnh của đa giác đều $\frac{n}{2}$ cạnh này bởi $A_1, A_2, \dots, A_{\frac{n}{2}}$ và các đỉnh còn lại của đồ thị $G$ là $B_1, B_2, \dots, B_{\frac{n}{2}}$ như trong hình 4.




*Hình 4.* Các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_{n/2}$ của các dây cung độ dài 2 sinh ra đồ thị đầy đủ $K_{n/2}$

Bây giờ ta chứng tỏ rằng các dây độ dài chẵn $\ell$ chỉ nối các đỉnh của tập $\{A_1, A_2, \dots, A_{\frac{n}{2}}\}$ với nhau. Thật vậy, giả sử ngược lại là tồn tại một dây độ dài chẵn $\ell$ nối hai đỉnh $B_i$ và $B_j$ của $\{B_1, B_2, \dots, B_{\frac{n}{2}}\}$ với nhau. Xét hai trường hợp:

a) Số chẵn $\ell \neq \frac{n}{2}$.

Theo Bổ đề 2, thì các dây $(A_{i-1}, A_{j-1})$ và $(A_i, A_j)$ không phải là cạnh của đồ thị $G$. Suy rộng ra, nếu có $0 < x < \frac{n}{2}$ ($x \leqslant \frac{n}{2}$ theo Bổ đề 6) dây cung độ dài $\ell$ nối các đỉnh của tập hợp $\{B_1, B_2, \dots, B_{\frac{n}{2}}\}$ với nhau, thì có ít nhất $x+1$ dây cung độ dài chẵn có hai đỉnh cùng thuộc $\{A_1, A_2, \dots, A_{\frac{n}{2}}\}$ không phải là cạnh của đồ thị $G$. Từ đó suy ra là có không quá $\frac{n}{2} - (x+1)$ dây cung độ dài $\ell$ nối hai đỉnh của tập hợp $\{A_1, A_2, \dots, A_{\frac{n}{2}}\}$. Khi đó tổng số dây cung độ dài $\ell$ sẽ không vượt quá $x + \frac{n}{2} - (x+1) = \frac{n}{2} - 1$ là điều mâu thuẫn với Bổ đề 6. Do đó phải có $x = \frac{n}{2}$. Lúc này chu trình:

$$C' = (B_1 A_1 A_{\frac{n}{2}} B_{\frac{n}{2}} A_{\frac{n}{2}-1} \dots A_{\frac{n}{2}+2-\frac{\ell}{2}} A_{\frac{n}{2}+1-\frac{\ell}{2}} B_{\frac{n}{2}+2-\frac{\ell}{2}} B_2 A_2 B_3 A_3 \dots B_{\frac{n}{2}+1-\frac{\ell}{2}})$$

là một chu trình Hamilton thứ hai của $G$, mâu thuẫn với giả thiết là $C$ là chu trình Hamilton duy nhất của $G$.

b) Số chẵn $\ell = \frac{n}{2}$.

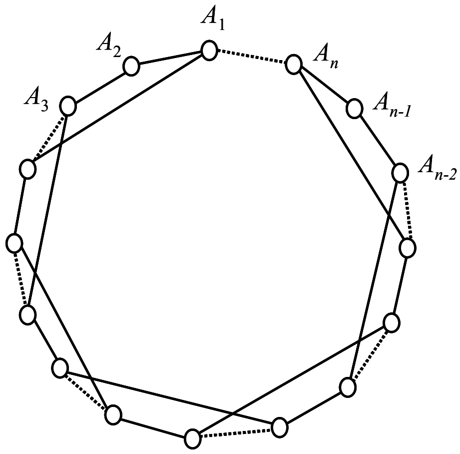
Theo Bổ đề 2, thì các dây $(A_{i-1}, A_{j-1})$ và $(A_i, A_j)$ không phải là cạnh của đồ thị $G$. Suy rộng ra, nếu có $0 < x < \frac{n}{4}$ ($x \leqslant \frac{n}{4}$ theo Bổ đề 6) dây cung độ dài $\ell$ nối các đỉnh của tập hợp $\{B_1, B_2, \dots, B_{\frac{n}{2}}\}$ với nhau, thì có ít nhất $x+1$ dây cung độ dài chẵn có hai đỉnh cùng thuộc $\{A_1, A_2, \dots, A_{\frac{n}{2}}\}$ không phải là cạnh của đồ thị $G$. Từ đó suy ra là có không quá $\frac{n}{4} - (x+1)$ dây cung độ dài $\ell$ nối hai đỉnh của tập hợp $\{A_1, A_2, \dots, A_{\frac{n}{2}}\}$. Khi đó tổng số dây cung độ dài $\ell$ sẽ không vượt quá $x + \frac{n}{4} - (x+1) = \frac{n}{4} - 1$ là điều mâu thuẫn với Bổ đề 6. Do đó phải có $x = \frac{n}{4}$. Lúc này chu trình:

$$C' = (B_1 A_1 A_{\frac{n}{2}} B_{\frac{n}{2}} A_{\frac{n}{2}-1} \dots A_{\frac{n}{4}+2} A_{\frac{n}{4}+1} B_{\frac{n}{4}+2} B_2 A_2 B_3 A_3 \dots B_{\frac{n}{4}+1})$$

là một chu trình Hamilton thứ hai của $G$, mâu thuẫn với giả thiết $C$ là chu trình Hamilton duy nhất của $G$.

Tóm lại, không có dây cung độ dài chẵn nào nối hai đỉnh của tập hợp $\{B_1, B_2, \ldots, B_{\frac{n}{2}}\}$ với nhau. Do đó các đỉnh của $\{B_1, B_2, \ldots, B_{\frac{n}{2}}\}$ sinh ra đồ thị $\bar{K}_{\frac{n}{2}}$. Các dây cung độ dài chẵn chỉ nối các đỉnh của tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_{\frac{n}{2}}$ với nhau. Từ Bổ đề 6 dễ dàng suy ra các đỉnh của $A_1, A_2, \ldots, A_{\frac{n}{2}}$ là đỉnh của một đồ thị đầy đủ $\frac{n}{2}$ đỉnh. Bổ đề được chứng minh. ■

Ta gọi một đỉnh của $G$ là *đỉnh đầy đủ* nếu nó được nối với tất cả các đỉnh khác của đồ thị. Ta định nghĩa *khoảng cách* giữa hai đỉnh của $G$ là độ dài con đường ngắn nhất dọc theo chu trình Hamilton $C$ nối chúng với nhau. Như vậy độ dài của một dây cung chính là khoảng cách giữa hai đỉnh của nó. Sau đây ta nghiên cứu các dây cung có độ dài 3.




*Hình 5.* Chu trình Hamilton mới tạo bởi các dây cung độ dài 3

Hai dây cung độ dài 3 được xem là cách nhau khoảng cách 2 theo chiều kim đồng hồ (hoặc chiều ngược kim đồng hồ) nếu 2 đỉnh xuất phát của nó tính theo chiều quy định cách nhau độ dài 2. Ta gọi một đỉnh là đỉnh *tự do* nếu nó không là đỉnh của dây cung độ dài 3 nào cả, và một đỉnh là *đỉnh đẹp* nếu từ nó có hai dây cung độ dài 3 xuất phát. Ta có bổ đề tiếp theo sau đây:

**Bổ đề 8.** *Nếu số đỉnh $n$ của đồ thị Hamilton tối đại $G$ là số lẻ thì $G$ có hai đỉnh tự do là láng giềng của cùng một đỉnh đẹp trên chu trình Hamilton của $G$. Nếu số đỉnh $n$ của đồ thị Hamilton tối đại $G$ là số chẵn thì $G$ có 2 đỉnh đẹp có khoảng cách lẻ tới nhau và 4 đỉnh tự do là láng giềng của hai đỉnh đẹp này ở trên chu trình Hamilton.*

*Chứng minh.* Khi $n$ lẻ thì theo Bổ đề 6 đồ thị $G$ có đúng $\frac{n-1}{2}$ dây cung độ dài 3. Theo Bổ đề 2 chúng không thể có khoảng cách 1 tới nhau, mỗi dây cung độ dài 3 có khoảng cách 2 tới dây cung tiếp theo mà thôi. Nếu bắt đầu từ một dây cung độ dài 3 kẻ các dây cung độ dài 3 tiếp theo theo quy tắc cứ dây tiếp theo cách dây trước nó độ dài 3 theo chiều ngược kim đồng hồ thì dây đầu tiên và dây thứ $\frac{n-1}{2}$ có đỉnh chung. Ta dễ tính được là nếu dây độ dài 3 đầu tiên bắt đầu với đỉnh thứ nhất, thì dây thứ $\frac{n-1}{2}$ có đỉnh cuối là đỉnh thứ

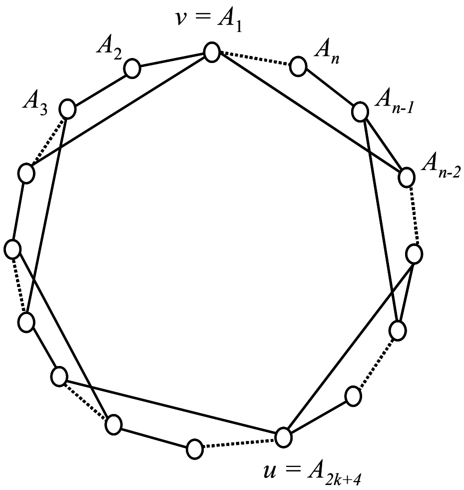
$$(1 + 2 \times \frac{n-3}{2}) + 3 = 1( \mod n)$$

Tức là $G$ luôn có một đỉnh đẹp $v$. Láng giềng của đỉnh đẹp $v$ này theo Bổ đề 2 chỉ có thể là

đỉnh tự do, tức là hai láng giềng của $v$ là hai đỉnh tự do trong $G$.
Khi $n$ là số lẻ thì $G$ có $\frac{n}{2}-1$ dây cung độ dài 3. Ta khẳng định rằng $G$ có ít nhất một đỉnh đẹp, vì nếu $G$ không có đỉnh đẹp nào, thì mỗi dây cung có độ dài 2 tới dây cung tiếp theo và được bố trí như trong Hình 5, khi đó dễ thấy các cạnh được tô đậm tạo thành một chu trình Hamilton mới (trong Hình 5, các cạnh của chúng được tô đậm nét):

$$C' = (A_1A_2A_3\dots A_{4k+2}A_{4k+3}\dots A_{n-2}A_{n-1}A_n\dots A_{4k+1}A_{4k}\dots A_5A_4),$$

mâu thuẫn với giả thiết $C$ là chu trình Hamilton duy nhất của $G$. Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng $G$ phải có đỉnh đẹp $v$. Tính từ đỉnh $v$ này theo chiều ngược kim đồng hồ và chiều kim đồng hồ, $\frac{n}{2}-1$ dây cung độ dài 3 liên tiếp nhau sẽ cách nhau độ dài 2, và sẽ cho ta một đỉnh đẹp $u$ thứ hai (xem Hình 6). Thật vậy, vị trí của $u$ có thể tính được đơn giản nếu như đánh số các đỉnh của $G$ là $A_1, A_2, \dots A_n$ ngược chiều kim đồng hồ và giả sử $v = A_1$ và có $k$ dây cung độ dài 3 liên tiếp nhau theo chiều ngược kim đồng hồ và $\frac{n}{2}-1-k$ dây cung độ dài 3 theo chiều kim đồng hồ tính từ $v$. Đỉnh $u$ sẽ là đỉnh thứ $1+2(k-1)+3 = 2k+4$, đó cũng là đỉnh cuối của dây thứ $\frac{n}{2}-1-k$ tính từ $v$ theo chiều kim đồng hồ theo công thức $n-2((\frac{n}{2}-1-k)-1) = 2k+4 \pmod{n}$. Lúc này, tương tự như trường hợp $n$ lẻ, các láng giềng của $u$ và $v$ trên $C$ sẽ là các đỉnh tự do, và chúng ta dễ thấy láng giềng của $u$ có khoảng cách lẻ tới láng giềng của $v$. Bổ đề được chứng minh. ∎




*Hình 6.* Hai đỉnh đẹp $v$ và $u$ khi $n$ chẵn.

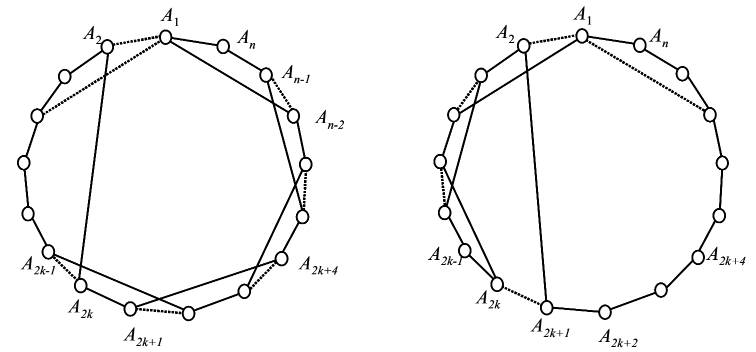
**Bổ đề 9.** *Đồ thị Hamilton tối đại luôn có duy nhất một đỉnh đầy đủ mà hai láng giềng của nó trên chu trình Hamilton là đỉnh bậc 2.*

*Chứng minh.* Dễ thấy, nếu đồ thị Hamilton tối đại có 2 đỉnh đầy đủ thì nó có nhiều hơn một chu trình Hamilton. Bây giờ, ta chứng minh rằng các đỉnh láng giềng $A_2$ và $A_n$ của đỉnh đẹp $v = A_1$ luôn là đỉnh bậc 2. Khi đó dễ thấy rằng đỉnh đẹp $A_1$ là đỉnh đầy đủ. Thật vậy, nếu có một chu trình Hamilton nào đó của đồ thị $G$ thì do các đỉnh $A_2$ và $A_n$ có bậc là 2 nên đỉnh $A_1$ luôn là đỉnh kề với $A_2$ và $A_n$ trên chu trình Hamilton này, do đó việc bổ sung cạnh nối $A_1$ với tất cả các đỉnh khác của $G$ không làm đồ thị có thêm chu trình Hamilton nếu ban đầu nó chỉ có duy nhất một chu trình Hamilton. Do điều kiện tối đại của $G$ (đồ thị nhiều cạnh nhất trong các đồ thị có cùng số đỉnh và có duy nhất một chu trình Hamilton) thì $A_1$ phải là đỉnh đầy đủ trong đồ thị $G$.

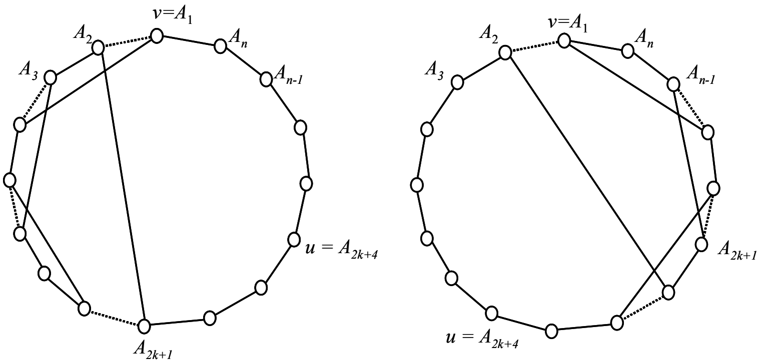
Để chứng minh bổ đề, ta giả sử ngược lại là từ $A_2$ có dây cung $e$ xuất phát. Ta xét hai trường hợp $n$ chẵn và $n$ lẻ và thu được một mâu thuẫn thông qua việc xây dựng một chu trình Hamilton thứ hai bằng cách sử dụng các dây cung độ dài 3 của đồ thị $G$:

a) Trường hợp $n$ là số lẻ:

Trong hình 7, ta có thể xây dựng được các chu trình Hamilton tương ứng với trường hợp độ dài của $e$ là lẻ tương ứng hình bên trái và tương ứng với độ dài $e$ chẵn là hình bên phải của Hình 7.




*Hình 7.* Chu trình Hamilton được tạo dựng khi $n$ lẻ




*Hình 8.* Chu trình Hamilton được tạo dựng khi $n$ chẵn

b) Trường hợp $n$ là số chẵn:

Theo Bổ đề 7, có $\frac{n}{2}$ đỉnh không kề nhau trên chu trình Hamilton sinh một đồ thị con đầy đủ và $\frac{n}{2}$ đỉnh còn lại sinh một đồ thị không có cạnh nào cả. Theo Bổ đề 8 thì hai đỉnh đẹp của $G$ cách nhau một khoảng cách lẻ, nên có một trong chúng là đỉnh của đồ thị con đầy đủ $K_{\frac{n}{2}}$. Không mất tổng quát giả sử $A_1$ là đỉnh của đồ thị con đầy đủ $K_{\frac{n}{2}}$, khi đó láng giềng $A_2$ của nó chỉ có thể có dây cung nối tới đỉnh có chỉ số lẻ $A_{2x+1}$ nào đó của đồ thị đầy đủ$K_{\frac{n}{2}}$. Giả sử đỉnh đẹp thứ hai là $u = A_{2k+4}$ như trong chứng minh của Bổ đề 8. Trong trường hợp này, ta xây dựng chu trình Hamilton thứ hai như bên trái của Hình 8 nếu dây cung $e$ không phân cách hai đỉnh đẹp và bên phải của Hình 8 nếu dây cung $e$ phân cách hai đỉnh đẹp này.

Như vậy trong cả hai trường hợp a) và b) ta đều thu được một chu trình Hamilton thứ hai, điều này mâu thuẫn với giả thiết là $G$ chỉ có duy nhất một chu trình Hamilton. Mâu thuẫn này chứng tỏ rằng đỉnh $A_2$ và tương tự đỉnh $A_n$ không có dây cung nào xuất phát cả ngoài các cạnh của chu trình Hamilton của $G$. Như vậy các đỉnh này có bậc là 2, và do đó đỉnh $A_1$ là đỉnh đầy đủ. ■

## 4. CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ 3

Ta chứng minh kết luận mạnh hơn của Định lý 3, rằng mỗi một đồ thị Hamilton tối đại $n \geqslant 3$ đỉnh đẳng cấu với một đồ thị được xây dựng bởi thuật toán nêu trong Định lý 2. Ký hiệu thuật toán này là $\Phi$. Dễ kiểm tra thấy kết luận của Định lý 3 đúng cho trường hợp $n = 3$ và $n = 4$. Giả sử kết luận của Định lý 3 đúng cho $n \geq 7$ rằng mỗi một đồ thị Hamilton tối đại $n \geq 7$ đỉnh đẳng cấu với một đồ thị được xây dựng bởi thuật toán $\Phi$. Ta chứng minh kết luận của định lý cũng đúng cho mọi đồ thị Hamilton tối đại $n + 1$ đỉnh. Thật vậy xét $G$ là đồ thị Hamilton tối đại $n + 1$ đỉnh. Theo Định lý 1 thì đồ thị $G$ có $[\frac{(n+1)^2}{4}] + 1$ cạnh. Theo Bổ đề 9, đồ thị $G$ có một đỉnh đầy đủ, ký hiệu là $A_{n+1}$ với hai láng giềng $A_1$ và $A_n$ có bậc là 2. Ta đánh số các đỉnh của $G$ bởi $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ theo chiều ngược kim đồng hồ dọc theo chu trình Hamilton của nó. Ta xét đồ thị mới tạo thành $G'$ thu được từ $G$ bằng cách bỏ đi các đỉnh $A_1, A_n, A_{n+1}$ và thêm vào đỉnh $A'_1$ và ác cạnh nối $A'_1$ với đỉnh $A_2$ và đỉnh $A_{n-1}$. Dễ thấy rằng đồ thị thu được $G'$ cũng chỉ có một chu trình Hamilton duy nhất $C' = (A'_1 A_2 \dots A_{n-1} A'_1)$ mà thôi. Thật vậy, giả sử ngược lại là $G'$ có một chu trình Hamilton thứ hai $C^* = (A'_1 A'_2 \dots A_{n-1} A'_1)$, thì đồ thị $G$ có chu trình Hamilton thứ hai thu từ $C^*$ bằng cách thay thế đỉnh $A'_1$ bởi dãy đỉnh $A_1 A_{n+1} A_n$ là điều vô lý. Mặt khác đồ thị $G'$ có đúng $[\frac{(n+1)^2}{4}] + 1 - n = [\frac{(n-1)^2}{4}] + 1$ cạnh, nên $G'$ cũng là đồ thị Hamilton tối đại $n - 1$ đỉnh. Theo giả thiết quy nạp thì $G'$ thu được bằng cách áp dụng thuật toán $\Phi$. Lưu ý rằng, mỗi đồ thị thu được bằng cách áp dụng thuật toán $\Phi$ đều có đúng hai đỉnh bậc 2, là hai đỉnh kề của đỉnh đầy đủ được tạo dựng trong thuật toán. Như vậy, dễ thấy đồ thị $G$ thu được bằng cách áp dụng thuật toán $\Phi$ với đỉnh đầy đủ đầu tiên $A_{n+1}$ và sau đó tiếp tục áp dụng thuật toán $\Phi$. Như vậy kết luận của định lý cũng đúng cho các đồ thị Hamilton tối đại $n + 1$ đỉnh. Vậy định lý được chứng minh. ■

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


[1] C. A. Barefoot, R. C. Entringer, Extremal maximal uniquely Hamiltonian, *J. Graph Theory* **4** (1980) 93–100.

[2] J. A. Bondy, B. Jackson, Vertices of small degree in uniquely Hamiltonian graphs, http://w.w.w.mcs.gold.ac.uk/reports/R971002.html (1997).

[3] M. Aigner, *Graphentheorie*, Teubner, Stuttgart, 1984.

[4] P.Erdos, Remark on a paper of pósa, *Publ. Math. Inst. Hungary. Acad. Sci.* **VII** (1962) 227–229.

[5] Vũ Đình Hòa, Đỗ Như An, Kết quả mới về đồ thị Hamilton tối đại, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **22** (2006) 117–122.

[6] J. Sheehan, Graphs with exactly one Hamiltonian circuit, *J. Graph Theory* **1** (1977) 37–43.


*Nhận bài ngày 17 - 8 - 2006*