

# GIẢI BÀI TOÁN ĐỘNG HỌC NGƯỢC ROBOT DƯ DẪN ĐỘNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP CHIẾU TỌA ĐỘ VÀ CHIẾU VẬN TỐC

NGUYỄN QUANG HOÀNG, THÁI PHƯƠNG THẢO

*Trường Đại học Bách khoa Hà Nội; [hoangnq@mail.hut.edu.vn](mailto:hoangnq@mail.hut.edu.vn)*

**Tóm tắt.** Một phương pháp giải bài toán động học ngược Robot dư dẫn động được trình bày trong bài báo này. Trước hết bài toán ngược động học tay máy dư dẫn động được trình bày ở hai cấp độ: mức liên hệ vận tốc và mức liên hệ gia tốc. Nghiệm của các bài toán này được đưa ra nhờ ma trận tựa nghịch đảo của ma trận Jacobi, trong đó có chú ý đến không gian bù để tránh được các giới hạn khớp. Giá trị biến khớp tìm được nhờ các phép tính tích phân được hiệu chỉnh bằng phương pháp chiếu. Nhờ phương pháp chiếu này, các biến khớp và vận tốc khớp được hiệu chỉnh đảm bảo chúng nằm trên các đa tạp liên kết về vị trí và vận tốc. Qua đó độ chính xác của nghiệm cần tìm được cải thiện đáng kể. Một số mô phỏng số được trình bày để minh họa cho thuật toán.

**Abstract.** A method for solving inverse kinematics of redundant robot is proposed in this paper. Firstly, the inverse kinematics of redundant robotic manipulators is represented in two levels: velocity level and acceleration level. Solutions of these problems are given by pseudo inverse of the Jacobian matrix under consideration of null space in order to avoid joint limitations. Secondly, the values of joint variables are found by the integration which is revised by the coordinate and velocity projection methods. By using this method, the joint variables and joint velocities are adjusted so that they are forced onto manifolds, which are defined by position constraints and velocity constraints. Therefore, the accuracy of solutions is significantly improved. The numerical simulations are illustrated for the effectiveness of the proposed method.

## 1. MỞ ĐẦU

Đối với robot dạng chuỗi người ta có thể phân thành hai loại: robot chuẩn và robot dư dẫn động. Robot chuẩn là robot có số bậc tự do bằng số bậc tự do của khâu tác động cuối hay bàn kẹp. Trái lại, robot dư dẫn động có số bậc tự do lớn hơn số bậc tự do của khâu tác động cuối. Robot dư dẫn động có nhiều ưu điểm so với robot chuẩn vì chúng cho phép có thể tối ưu quỹ đạo chuyển động, tránh được vật cản, tránh được các điểm kỳ dị, và tránh được các giới hạn khớp [1, 9, 10, 11]. Đối với robot dư dẫn động, do số ẩn nhiều hơn số phương trình, nên có nhiều phương án giải quyết bài toán động học ngược. Phương án dựa trên ma trận Jacobi của phương trình liên kết hay được sử dụng nhất, do tính chất đơn giản của phương pháp. Với phương pháp này ta chỉ cần giải hệ phương trình đại số tuyến tính có số ẩn nhiều hơn số phương trình. Các tọa độ khớp sau đó nhận được bằng cách tích phân các vận tốc biến khớp theo thời gian, với điều kiện đầu tương thích. Tuy nhiên, các tọa độ nhận được qua phép tích phân có thể làm cho bàn kẹp không còn bám theo quỹ đạo mong

muốn do có các sai số tích lũy trong quá trình tính toán tích phân. Một số phương án khắc phục hiện tượng này đã được chú ý nghiên cứu. Đó là phương pháp phản hồi động học [10], phương pháp hiệu chỉnh gia lượng sai số vectơ tọa độ suy rộng [5,6,7].

Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng phương pháp chiếu tọa độ suy rộng và chiếu vận tốc suy rộng để hiệu chỉnh nghiệm của bài toán động học dựa trên ma trận Jacobi. Ý tưởng cơ bản của phương pháp là chiếu kết quả tọa độ suy rộng và vận tốc suy rộng nhận được sau khi tích phân trên các đa tạp xác định bởi các phương trình liên kết tạo bởi chuyển động mong muốn hay liên kết chương trình và đạo hàm của nó.

Bài báo được trình bày như sau: việc thiết lập và phương pháp giải bài toán được trình bày trong mục 2 và 3. Mục 4 trình bày phương pháp chiếu tọa độ và chiếu vận tốc để tăng độ chính xác nghiệm của bài toán. Các mô phỏng số bằng phần mềm đa năng Matlab đối với một tay máy phẳng 5 bậc tự do được trình bày trong mục 5. Cuối cùng là một số kết luận được đưa ra.

## 2. ĐẶT BÀI TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Xét tay máy  $n$  bậc tự do, gọi  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  là vectơ chứa các tọa độ khớp. Bàn kẹp của robot vận hành trong không gian thao tác hay không gian làm việc, gọi  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  là vectơ chứa vị trí và hướng của bàn kẹp  $\mathbb{R}^m$  ( $m \leq 6$ ). Bài toán động học thuận robot được giải quyết bằng các phương pháp hình học, qui tắc Denavit-Hartenberg hoặc Craig [2, 3, 4, 9, 10]. Kết quả của bài toán động học thuận cho ta liên hệ sau

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = 0, \quad \mathbf{x}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Tay máy là dư dẫn động khi  $m < n$ , số bậc tự do của tay máy lớn hơn số bậc tự do của bàn kẹp.

Đạo hàm phương trình (1) theo thời gian ta nhận được phương trình liên hệ vận tốc

$$\mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (2)$$

với các ma trận Jacobi như sau

$$\mathbf{J}_x(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}, \quad \mathbf{J}_q(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{q}.$$

Tiếp tục đạo hàm phương trình (2) cho ta phương trình liên hệ ở cấp độ gia tốc

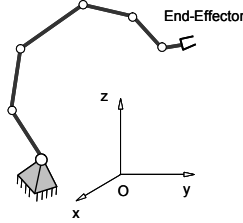
$$\mathbf{J}_x \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_q \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_x \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{J}}_q \dot{\mathbf{q}} = 0. \quad (3)$$

Với trường hợp robot phẳng,  $m = 3$ ,  $\mathbf{x} = [x, y, \phi]$ , quan hệ (1,2,3) có thể được viết ở dạng tường minh như sau

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}), \quad (1')$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (2')$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (3')$$



Hình 1. Tay máy cấu trúc cây

Ngoài ra, như ta biết phương trình vi phân chuyển động của tay máy dạng chuỗi hở có dạng [2, 4, 9, 10]

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}), \quad (4a)$$

trong đó  $\mathbf{u}$  là vectơ chứa các lực/mômen dẫn động,  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  là ma trận khối lượng,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  là vectơ chứa các lực Coriolis và lực ly tâm, và  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  là vectơ chứa lực suy rộng do trọng trường.

Bài toán đặt ra ở đây là: Cho biết chuyển động của bàn kẹp tức là biết các hàm  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ,  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$  ta cần tìm chuyển động của các tọa độ khớp  $\mathbf{q}(t)$ , và vectơ mômen/lực dẫn động  $\mathbf{u}$ .

## 2.2. Phương án giải quyết

Giả sử rằng ma trận Jacobi  $\mathbf{J}_q$  cỡ  $m \times n$  có hạng đầy đủ,  $\text{rank}(\mathbf{J}_q) = m$ . Nếu biết  $\mathbf{x}$  và  $\mathbf{q}$  từ phương trình (2, 2') hoặc từ (3, 3') ta sẽ giải được các vận tốc khớp  $\dot{\mathbf{q}}$  hoặc gia tốc khớp  $\ddot{\mathbf{q}}$ .

Nếu sử dụng phương trình (2) ta giải được  $\dot{\mathbf{q}}$ , thực hiện tích phân và đạo hàm ta nhận được  $\mathbf{q}$  và  $\ddot{\mathbf{q}}$ .

Nếu sử dụng phương trình (3) ta giải được  $\ddot{\mathbf{q}}$ , thực hiện tích phân ta nhận được  $\dot{\mathbf{q}}$  và  $\mathbf{q}$ .

Thay các giá trị tìm được vào phương trình vi phân chuyển động (4a) ta nhận được lực/mômen dẫn động của các động cơ dẫn.

## 3. TỐI ƯU CHUẨN CỦA VECTƠ VẬN TỐC VÀ GIA TỐC SUY RỘNG

### 3.1. Tối ưu chuẩn của vectơ vận tốc suy rộng

Giải phương trình (2) kết hợp điều kiện chuẩn của vectơ vận tốc suy rộng nhỏ nhất. Tức giải (2) tìm  $\dot{\mathbf{q}}$  từ  $\dot{\mathbf{x}}$ , với điều kiện

$$f = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{W} \dot{\mathbf{q}} \rightarrow \min, \quad \mathbf{W} > 0. \quad (4)$$

Kết quả là

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_W^+(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}, \quad (5)$$

với

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})_W^+ = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) [\mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T(\mathbf{q})]^{-1},$$

được gọi là ma trận tựa nghịch đảo có trọng số của ma trận Jacobi  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  [8].

Nếu chọn ma trận trọng số là ma trận đơn vị,  $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ , nghiệm tính theo công thức (4) sẽ có chuẩn nhỏ nhất.

Nếu chọn ma trận trọng số là ma trận khối lượng của tay máy,  $\mathbf{W} = \mathbf{M}(\mathbf{q})$ , thì nghiệm trên được tìm ứng với tiêu chuẩn tối ưu động năng, động năng cực tiểu.

Nếu chú ý đến không gian bù của ma trận Jacobi, thì nghiệm của (2) sẽ là

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_W^+(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{I} - \mathbf{J}_W^+ \mathbf{J}) \mathbf{z}_0, \quad (6)$$

với  $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^n$  là vector tùy ý. Vectơ này sẽ tạo ra chuyển động cho các khâu mà không ảnh hưởng đến chuyển động của bàn kẹp. Thông thường vectơ này sẽ được chọn để khai thác thêm các ưu điểm của tay máy dư dẫn động như tránh vật cản, tránh điểm kỳ dị, tránh va vào các giới hạn khớp. Thông thường người ta hay tính  $\mathbf{z}_0$  theo công thức

$$\mathbf{z}_0 = \alpha \frac{\partial \phi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}, \quad (7)$$

với  $\phi(\mathbf{q})$  là các hàm mục tiêu phụ thuộc vào yêu cầu đặt ra. Chẳng hạn, để tránh các điểm kỳ dị, tại đó  $\det[\mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q})] = 0$ , ta chọn  $\phi(\mathbf{q})$  là hàm đo khả năng thao tác của robot:

$$\phi(\mathbf{q}) = \sqrt{\det[\mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q})]}. \quad (8)$$

Do đó, việc cực đại hàm này sẽ giúp robot tránh được các điểm kỳ dị trong quá trình hoạt động. Để tránh va vào các giới hạn khớp, người ta đưa vào hàm đo khoảng cách tới giới hạn khớp:

$$\phi(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i \left( \frac{q_i - \bar{q}_i}{q_{iM} - q_{im}} \right)^2, \quad (9)$$

với  $q_{iM}(q_{im})$  là ký hiệu của giới hạn lớn nhất (nhỏ nhất) và  $\bar{q}_i$  là giá trị giữa của khoảng làm việc của khớp;  $c_i$  là các trọng số. Do đó, cực tiểu khoảng cách này, tính dư dẫn động sẽ được khai thác để giữ cho các biến khớp gần giá trị giữa của khoảng làm việc của robot, tránh được sự va vào các giới hạn khớp. Để tránh va vào vật cản, ta sử dụng hàm khoảng cách tới vật cản

$$\phi(\mathbf{q}) = \min \|\mathbf{p}(\mathbf{q}) - \mathbf{o}\|, \quad (10)$$

với  $\mathbf{o}$  là vector vị trí của một điểm thích hợp trên chướng ngại vật (ví dụ tâm trong trường hợp mô hình vật cản là hình cầu) và  $\mathbf{p}(\mathbf{q})$  là vectơ vị trí suy rộng cấu trúc của robot. Do đó, cực đại khoảng cách này sẽ giúp robot tránh được vật cản trong quá trình hoạt động. Trên thực tế robot không gian, việc mô tả các vật cản cũng như xác định giá trị hàm này là khá phức tạp. Trong bài báo này, việc tránh va vào các giới hạn khớp được quan tâm khai thác. Thay (9) vào (7), và viết gọn lại ta nhận được

$$\mathbf{z}_0 = -\frac{\partial \phi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = -\mathbf{K}(\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}), \quad (11).$$

với  $K_{ii} = c_i / (q_{iM} - q_{im})^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

### 3.2. Tối ưu chuẩn của gia tốc suy rộng

Khi giải bài toán ngược động học ở cấp độ gia tốc, phương trình (3) hoặc (3') được sử dụng cho bài toán này. Viết lại (3') ta có

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (12)$$

Trong tự như đối với (2'), phương trình trên có vô số nghiệm. Ở đây ta sẽ đưa thêm vào điều kiện nghiệm của (12) có chuẩn nhỏ nhất. Tức giải (12') với điều kiện

$$f = \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{W} \ddot{\mathbf{q}} \rightarrow \min. \quad (13)$$

Kết quả cho ta biểu thức

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_W^+(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}]. \quad (14)$$

Nếu chú ý đến không gian bù của ma trận Jacobi, thì nghiệm của (12) sẽ là

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_W^+(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}] + [\mathbf{I} - \mathbf{J}_W^+(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q})]\mathbf{z}_0. \quad (15)$$

Trong phần này, việc chọn vectơ  $\mathbf{z}_0$  được đề xuất như sau

$$\mathbf{z}_0 = -\mathbf{K}_1\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_2(\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}), \quad \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2 > \mathbf{0}, \quad (16)$$

với hy vọng tránh được va chạm với giới hạn khớp. Thực vậy, khi thay (16) vào (15) ta nhận được phương trình vi phân đối với biến khớp  $\mathbf{q}(t)$  như sau

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^+(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}] - (\mathbf{I} - \mathbf{J}^+\mathbf{J})\mathbf{K}_1\dot{\mathbf{q}} - (\mathbf{I} - \mathbf{J}^+\mathbf{J})\mathbf{K}_2(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)$$

hay

$$\ddot{\mathbf{q}} + [(\mathbf{I} - \mathbf{J}^+\mathbf{J})\mathbf{K}_1 + \mathbf{J}^+\dot{\mathbf{J}}]\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^+\mathbf{J})\mathbf{K}_2(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) = \mathbf{J}^+(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{x}} \quad (17)$$

với hy vọng rằng nghiệm  $\mathbf{q}(t)$  sẽ tuần hoàn khi  $\ddot{\mathbf{x}}$  tuần hoàn, và như vậy sẽ tránh được sự tăng hoặc giảm liên tục của biến khớp và do đó sẽ tránh được va chạm vào giới hạn khớp.

## 4. HIỆU CHỈNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CHIẾU

Do có sai số của phương pháp và sai số làm tròn trong quá trình tìm  $\mathbf{q}(t)$  từ các phương trình (6) hoặc (17) bằng các phương pháp số, nghiệm  $\mathbf{q}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  tìm được có thể không còn thỏa mãn các phương trình liên kết (1') và (2'). Trong phần này trình bày phương pháp chiếu để hiệu chỉnh các giá trị  $\mathbf{q}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  tìm được sao cho chúng thỏa mãn các phương trình liên kết (1') và (2').

#### 4.1. Hiệu chỉnh tọa độ suy rộng

Kết quả tích phân từ  $\tilde{\mathbf{q}}$  cho ta tọa độ suy rộng  $\mathbf{q}^*$ , giá trị này có thể không còn thỏa mãn phương trình (1) do các sai số tích phân, sai số làm tròn  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) \neq 0$ . Ở đây, ta sẽ hiệu chỉnh để đạt được  $\mathbf{q}$  thỏa mãn các phương trình (1). Theo phương pháp chiếu, ta sẽ tìm điểm  $\mathbf{q}$  nằm trên đa tạp xác định bởi (1) và cách điểm  $\mathbf{q}^*$  với khoảng cách ngắn nhất. Khi đó bài toán trở thành tìm  $\mathbf{q}$  thỏa mãn (1) sao cho hàm  $V$  sau đây đạt cực tiểu

$$V = \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*)^T \mathbf{P}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) \rightarrow \min, \mathbf{P} > 0. \quad (18)$$

Sử dụng phương pháp hàm phạt (hay phương pháp nhân tử Lagrange tăng cường), ta xét hàm cần tối ưu sau

$$L = V + \frac{1}{2} \mathbf{f}^T(\mathbf{x}, \mathbf{q}) \mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}), \quad (19)$$

với  $\mathbf{A}$  là ma trận đường chéo, xác định dương (nếu chọn các phần tử bằng nhau thì ta có thể thay bằng một hằng số), đó là các nhân tử phạt (penalty factor). Đạo hàm theo biến  $\mathbf{q}$  ta nhận được

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{P}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) + \mathbf{J}_q^T(\mathbf{q}) \mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = 0. \quad (20)$$

Đây là hệ  $m$  phương trình đại số phi tuyến đối với  $\mathbf{q}$  và có thể giải bằng phương pháp lặp Newton-Raphson. Khai triển Taylor hàm  $\mathbf{h}(\mathbf{q}, t)$  ở lân cận  $\mathbf{q}_0$  ta nhận được

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}_0 + \Delta \mathbf{q}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{q}_0) + \mathbf{H}(\mathbf{q}_0) \Delta \mathbf{q} + \dots \quad (21)$$

với

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} [\mathbf{P}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) + \mathbf{J}_q^T(\mathbf{q}) \mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q})]_{\mathbf{q}_0} = \mathbf{P} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} [\mathbf{J}_q^T \mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q})]_{\mathbf{q}_0} \approx \mathbf{P} + [\mathbf{J}_q^T \mathbf{A} \mathbf{J}_q]_{\mathbf{q}_0}. \quad (22)$$

Lưu ý khi tính ma trận  $\mathbf{H}(\mathbf{q}_0)$ , ta đã bỏ đi một số hạng khi tính  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} [\mathbf{J}_q^T \mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q})]_{\mathbf{q}_0}$ . Về mặt toán học hoàn toàn có thể tính được với công cụ Maple, tuy nhiên số hạng này tương đối phức tạp nên ở đây ta bỏ qua nó.

Phương pháp lặp được sử dụng để tìm nghiệm  $\mathbf{q}$  như sau:

- 1)  $k = 0$  cho biết số bước lặp  $N$ ,  $\mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{q}^*$ .
- 2) Tính  $\mathbf{h}(\mathbf{q}^{(k)})$ .
- 3) Kiểm tra điều kiện dừng, nếu  $\|\mathbf{h}(\mathbf{q}^{(k)})\| < \varepsilon$  hoặc  $k \geq N$  thì dừng, trái lại tiếp tục 4)
- 4) Tính ma trận  $\mathbf{H}(\mathbf{q}^{(k)})$ , giải hệ  $\mathbf{h}(\mathbf{q}^{(k)}) + \mathbf{H}(\mathbf{q}^{(k)}) \Delta \mathbf{q} = 0$  tìm  $\Delta \mathbf{q}$ .
- 5) Tính giá trị mới  $\mathbf{q}^{(k+1)} = \mathbf{q}^{(k)} + \Delta \mathbf{q}$ .
- 6) Tăng  $k$ ,  $k = k + 1$ , quay lại 2).

#### 4.2. Hiệu chỉnh vận tốc suy rộng

Sau khi hiệu chỉnh tọa độ suy rộng, ta tiến hành hiệu chỉnh vận tốc suy rộng. Việc hiệu chỉnh vận tốc suy rộng được sử dụng khi ta giải bài toán động học ngược ở mức gia tốc, tức

là sử dụng phương trình (3) hoặc (3'). Giả sử kết quả tích phân từ  $\dot{\mathbf{q}}$  cho ta vận tốc suy rộng  $\dot{\mathbf{q}}^*$ , giá trị này có thể không còn thỏa mãn phương trình (2) hoặc (2') do các sai số tích phân, sai số làm tròn, tức

$$\mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}}^* \neq 0, \quad (23)$$

ở đây ta sẽ hiệu chỉnh để đạt được  $\dot{\mathbf{q}}$  thỏa mãn các phương trình (2).

Theo phương pháp chiếu, ta sẽ tìm điểm  $\dot{\mathbf{q}}$  nằm trên đa tạp xác định bởi (2) và cách điểm  $\dot{\mathbf{q}}^*$  với khoảng cách ngắn nhất. Như thế, bài toán trở thành tìm  $\dot{\mathbf{q}}$  thỏa mãn (2) sao cho hàm  $V$  đạt cực tiểu

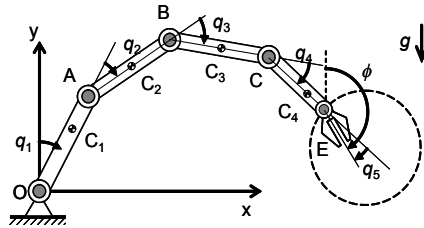
$$V = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^*)^T \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^*) \rightarrow \min, \quad \mathbf{Q} > 0. \quad (24)$$

Giải bài toán này bằng phương pháp nhân tử Lagrange cho ta kết quả như sau

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{J}_q^T (\mathbf{J}_q \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{J}_q^T)^{-1} (\mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}}^*) + \dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{J}_Q^+ \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{I} - \mathbf{J}_Q^+) \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}}^*. \quad (25)$$

Như vậy, trong quá trình hiệu chỉnh (chiếu) ta đã tìm được trạng thái của hệ thỏa mãn các điều kiện liên kết của hệ.

## 5. MÔ PHỎNG SỐ



Hình 2. Tay máy phẳng 5 bậc tự do

Trong phần này, các kết quả mô phỏng số bằng phần mềm đa năng Matlab được đưa ra. Đối tượng khảo sát là một tay máy phẳng 5 bậc tự do với các khớp quay chuyển động trong mặt phẳng đứng. Các khâu có khối lượng  $m_i$ , chiều dài  $l_i$ , vị trí khối tâm xác định bởi  $a_i$ , và mômen quán tính khối đối với trục qua khối tâm của khâu là  $\mathbf{J}_{C_i}$ . Mô hình và các thông số của tay máy được đưa ra như trên Hình 2 và Bảng 1.

Bảng 1. Các thông số của tay máy

khâu $i$	1	2	3	4	5
$l$ [m]	0,55	0,50	0,45	0,40	0,20
$a$ [m]	0,20	0,20	0,20	0,20	0,10
$m$ [kg]	2,00	1,75	1,50	1,00	0,50
$\mathbf{J}_{C_i}$ [kg m <sup>2</sup> ]	0,0504	0,0364	0,0253	0,0133	0,0016

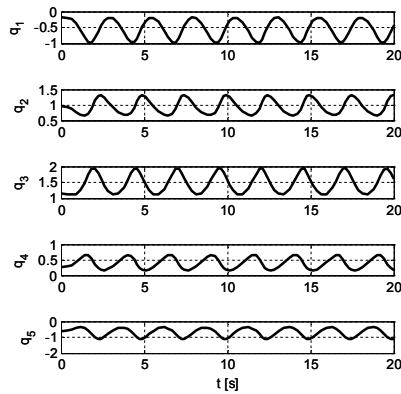
Trong các mô phỏng, ta cho bàn kẹp chuyển động theo quỹ đạo tròn với tâm là  $(x_C, y_C) = (0,8, 0,5)$ m và bán kính  $R = 0,4$ m. Vận tốc dọc quỹ đạo là 1,0m/s, hướng của bàn kẹp được

giữ không đổi  $\phi = 1,5708\text{rad}$ . Kết quả của bài toán động học thuận cho ta phương trình sau  $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$ , với

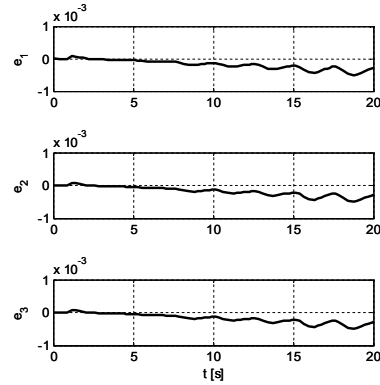
$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \left[ \sum_{k=1}^5 L_k \sin\left(\sum_{k=1}^k q_i\right), \sum_{k=1}^5 L_k \cos\left(\sum_{k=1}^k q_i\right), \sum_{k=1}^5 q_i \right]^T,$$

ở đây  $\mathbf{x} = [x, y, \phi]^T$  là véctơ chứa vị trí  $(x, y)$  và hướng của bàn kẹp  $\phi$ ,  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5]^T$  là véctơ chứa các biến khớp.

Để thấy được hiệu quả của phương pháp chiếu tọa độ, ta thực hiện mô phỏng số cho các trường hợp không chiếu và có chiếu tọa độ ở các mức vận tốc và gia tốc. Kết quả khi không sử dụng phép chiếu tọa độ được thể hiện trên các Hình 3, 4. Hình 3 chỉ ra đồ thị theo thời gian của các tọa độ khớp  $q_i(t)$  và Hình 4 là sai số bám quỹ đạo.

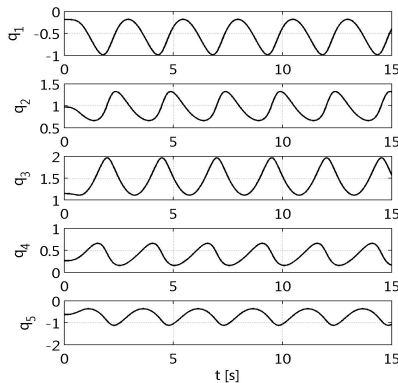


Hình 3. Đồ thị các biến khớp theo thời gian  $q(t)$ , [rad]

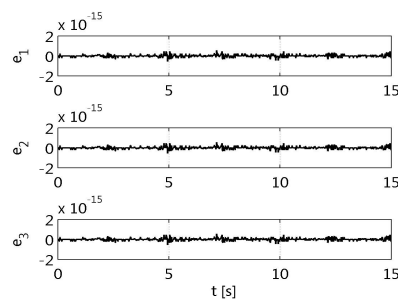


Hình 4. Đồ thị sai số bám quỹ đạo  $e(t)$ , [m, m, rad]

Từ đồ thị trên ta thấy rằng sai số bám quỹ đạo vẫn còn khá lớn, cỡ  $10^{-3}\text{m}$ , và có xu hướng tăng dần về trị số.



Hình 5. Đồ thị các biến khớp theo thời gian  $q(t)$ , [rad]

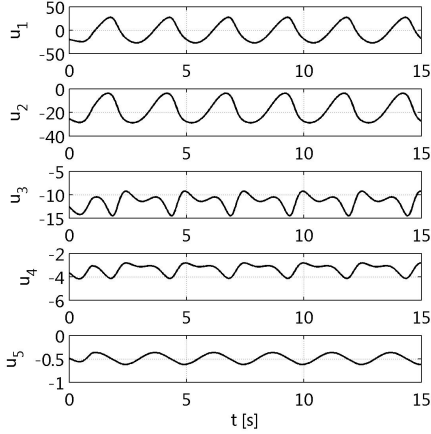


Hình 6. Đồ thị sai số bám quỹ đạo  $e(t)$ , [m, m, rad]

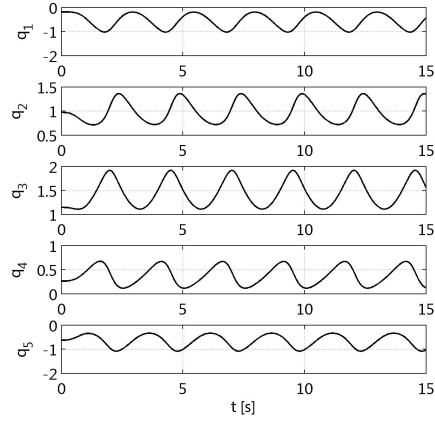
Trong trường hợp có sử dụng phương pháp chiếu tọa độ, các kết quả nhận được khi giải bài toán theo phương trình (6). Trong đó ta chọn ma trận trọng số  $\mathbf{W}$  là ma trận đơn vị và ma trận  $\mathbf{K}$  trong (11) là



$$\mathbf{K} = \text{diag}(10, 10, 10, 10, 10).$$



Hình 7. Đồ thị mômen dẫn động  $u(t)$ , [Nm]



Hình 8. Đồ thị các biến khớp theo thời gian  $q(t)$ , [rad]

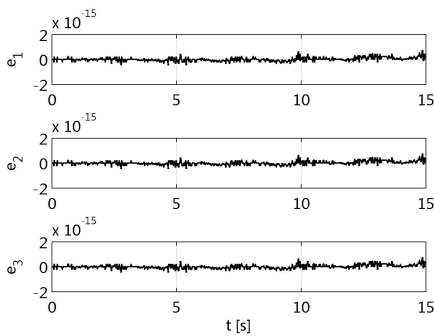
Kết quả đưa ra bao gồm đồ thị theo thời gian của các tọa độ khớp  $q_i(t)$ , sai số tám quỹ đạo, đồ thị các mômen dẫn động  $u_i(t)$  tương ứng với các Hình 5, 6, và 7.

Các Hình 8, 9, và 10 là kết quả khi giải bài toán dựa trên phương trình liên hệ gia tốc (15), với các tham số sử dụng trong biểu thức

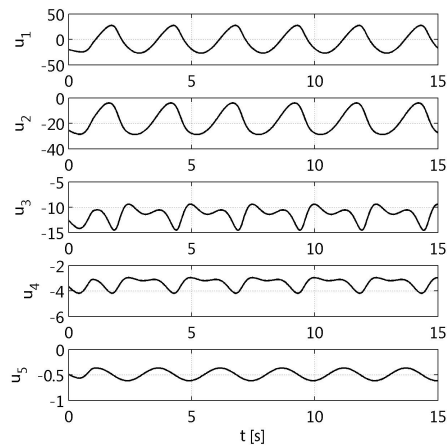
$$\mathbf{K}_1 = \text{diag}(10, 10, 10, 10, 10),$$

$$\mathbf{K}_2 = \text{diag}(20, 20, 20, 20, 20).$$

Từ các kết quả trên ta thấy rằng, sai số tám quỹ đạo là rất nhỏ, cỡ  $10^{-15}$  (Hình 6 và 9). Đồ thị các biến khớp thay đổi có tính chất lặp lại tương ứng với sự lặp lại chuyển động của bàn kẹp.



Hình 9. Đồ thị sai số tám quỹ đạo  $e(t)$ , [m, m, rad]



Hình 10. Đồ thị mômen dẫn động  $u(t)$ , [Nm]

## 6. KẾT LUẬN

Bài báo tập trung giải quyết bài toán động học ngược robot dư dẫn động dựa trên các phương trình liên hệ về vận tốc và gia tốc. Phương pháp chiếu hiệu chỉnh được đưa vào đã làm tăng độ chính xác nghiệm của bài toán. Ngoài ra, không gian bù của ma trận Jacobi cũng được khai thác để đảm bảo cho các biến khớp nằm trong miền giới hạn của nó và do đó đã tránh được các va chạm vào các giới hạn khớp. Tính đúng đắn và tin cậy của phương pháp đã được khẳng định thông qua các mô phỏng số đối với tay máy phẳng 5 bậc tự do. So sánh kết quả mô phỏng của phương pháp chiếu với phương pháp phản hồi động học thấy rõ phương pháp chiếu có độ chính xác lớn hơn. Phương hướng phát triển tiếp theo của bài toán là giải quyết bài toán động học ngược với các tiêu chuẩn tối ưu khác như tối ưu mômen dẫn động và tối ưu công suất của các động cơ dẫn.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Y. Nakamura, *Advanced Robotics/Redundancy and Optimization*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading 1991.
- [2] Nguyễn Thiện Phúc, *Robot công nghiệp*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2004.
- [3] Nguyễn Văn Khang, *Động lực học hệ nhiều vật*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2007.
- [4] Nguyễn Văn Khang, Chu Anh Mỹ, *Cơ sở robot công nghiệp*, Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội, 2011.
- [5] Nguyễn Văn Khang, Lê Đức Đạt, Trần Hoàng Nam, Về một thuật toán giải bài toán động học ngược robot dạng chuỗi, *Tuyển tập Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ VIII*, Tập 1, Hà Nội, 2008.
- [6] Nguyen Van Khang, Nguyen Quang Hoang, Tran Hoang Nam, On an efficient method for improving the accuracy of the inverse kinematics of robotic manipulators, *Int. Conference on Engineering Mechanics and Automation (ICEMA 2010)*, Hanoi, July 1-2, 2010 (186–194).
- [7] Nguyen Quang Hoang, Nguyen Van Khang, On kinematic inverse and control of redundant manipulators under consideration of jammed joint, *Proceed. Iftomm 1. International Symposium on Robotics and Mechatronics*, Hanoi, Vietnam, 2009 (201–207).
- [8] C.R.Rao, *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*, New York, Wiley, 1971.
- [9] M. W. Spong Hutchinson S. and M. Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*, John Wiley & Sons, New York, 2006.
- [10] L. Sciavicco, B. Siciliano, *Modelling and Control of Robot Manipulators*, 2<sup>nd</sup> Edition, Springer-Verlag, London, UK, 2000.
- [11] Y. Zhang, and J. Wang, Obstacle avoidance for kinematically redundant manipulators using a dual neural network, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics part b: cybernetics* **34** (1) (February 2004).

Nhận bài ngày 20 - 12 - 2011