

MỘT PHƯƠNG PHÁP TÌM LỰC TỐI HẠN CỦA VỎ TRỤ KÍN VÀ HỖ CÓ MẶT CẮT NGANG KHÔNG TRÒN CHỊU TÁC DỤNG CỦA ÁP LỰC NGOÀI

LÊ NGỌC HỒNG, LÊ NGỌC THẠCH

Bài toán ổn định của vỏ trụ đã được nhiều tác giả nghiên cứu nhưng chủ yếu là các vỏ có mặt cắt ngang là hình tròn [1]. Trong các lĩnh vực kỹ thuật khác nhau, ta còn gặp các loại vỏ trụ có mặt cắt ngang không tròn, kín hoặc hở (các vỏ hầm, các bể chứa nhiên liệu, các đường ống...) mà việc nghiên cứu ổn định của các vỏ này còn ít được đề cập tới vì khó khăn chủ yếu là việc giải các hệ phương trình vi phân có hệ số không phải là hằng số. Bài báo trình bày một cách xác định lực tới hạn của các loại vỏ này trên cơ sở phương pháp tiệm cận tích phân của A. L. Goldelveizer [2] đối với lý thuyết vỏ tuyến tính tuân theo giả thiết Kirchoff-Love [2].

1. PHƯƠNG TRÌNH ỔN ĐỊNH “NHỎ” VÀ ĐỊNH TÍNH NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Từ các hệ thức cơ bản của lý thuyết vỏ mỏng đàn hồi, ta nhận được hệ phương trình dùng để khảo sát ổn định tuyến tính của vỏ trụ có mặt cắt ngang không tròn chịu tác dụng của áp lực bên ngoài, viết dưới dạng các đại lượng không thứ nguyên như sau:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_\beta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} - \frac{h^2}{3(1-\mu^2)} \nabla \nabla W - P \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} &= 0 \\ \frac{1}{R_\beta} \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} + \nabla \nabla \Phi &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Với tọa độ không thứ nguyên α, β lấy theo đường sinh và đường chu tuyến của vỏ (có các hệ số Lamé $A = B = 1$).

* h, R_β, W là một nửa bề dày, độ cong của đường β và chuyển vị pháp tuyến viết dưới dạng không thứ nguyên, bằng các đại lượng tương ứng chia cho một trị số B có thứ nguyên bằng chiều dài và đặc trưng cho kích thước hình học của vỏ, ví dụ là bán kính cong trung bình của đường β . Do đó h là một trị số bé đối với vỏ mỏng.

* $P = \frac{P^*}{E}$ với P^* là áp lực pháp tuyến

* $\Phi = \frac{\varphi}{2EhB^2}$ với φ là hàm ứng suất của bài toán vỏ mà khi biết nó ta có thể tính được áp lực màng N_0, N_β và S .

Tại những vùng trên mặt vỏ có xuất hiện các nếp nhăn (khi mất ổn định) hàm Φ và W biến đổi nhanh theo phương đường tọa độ β , ta có thể giả thiết $\frac{\partial}{\partial \beta} \gg 1$ và nghiệm của phương trình

(1.1) khi mặt vỏ luôn luôn trơn, không bị gãy, dưới dạng:

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi(\beta) \sin k\alpha \\ W &= W(\beta) \sin k\alpha\end{aligned}\quad (1.2)$$

Với $k = n\pi/L$, n : số nửa bước sóng hình sin trên chiều dài không thứ nguyên của vỏ.

Thay (1.2) vào (1.1) ta nhận được phương trình gần đúng để xác định hàm Φ của biến β :

$$\frac{h^2}{3(1-\mu^2)} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \left[R_\beta \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4} \right] + \frac{k^4}{R_\beta} \Phi + P \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left[R_\beta \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4} \right] = 0 \quad (1.3)$$

Sử dụng phương pháp thông số bé, tác giả đề nghị tìm nghiệm của (1.3) dưới dạng

$$\begin{aligned}\Phi &= e^{f(\beta)/\varepsilon} [\Phi_{1(\beta)} + \varepsilon \Phi_{2(\beta)} + \dots] \\ P &= P_1 \varepsilon^6 + P_2 \varepsilon^8 + P_3 \varepsilon^9 + \dots\end{aligned}\quad (1.4)$$

với:

$$\varepsilon = \sqrt[3]{\frac{h^2}{3(1-\mu^2)}} \quad \text{là một thông số bé}$$

$f(\beta)$, $\Phi_{i(\beta)}$ (với $i = 1, 2, \dots$) là các hàm của β

P_i ($i = 1, 2, \dots$) là các hằng số cần tìm.

Thay (1.4) vào (1.3) sau khi biến đổi ta nhận được về trái là một đa thức thuần nhất của ε . Cho các hệ số của đa thức bằng không ta nhận được phương trình đại số đối với đạo hàm $f'(\beta)$ (ký hiệu $F = f'$).

$$F^8 + P_1 F^6 + \frac{K^4}{R_\beta^2} = 0 \quad (1.5)$$

Giải phương trình đại số này [3] và tích phân nghiệm ta tìm được:

$$f(\beta) = \pm \int_0^\beta \left(\frac{P_1}{4} + D_1 \right)^{1/2} d\beta$$

với D_1 là hàm của P_1 và của $R_{(\beta)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Phương trình để tìm hàm $\Phi_{1(\beta)}$ sẽ có dạng:

$$(8R_\beta F'^3 + 6P_1 R_\beta F') \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} + (4R'_\beta F^3 + 15P_1 R_\beta F'^2 + 28R_\beta F^2 F' + 2P_1 R'_\beta F) \Phi_1 = 0 \quad (1.6)$$

Từ đó

$$\Phi_1 = C_1 R_\beta^{-1/2} F^{-7/2} (8F^2 + 6P_1)^{-1/2} (F^2 + P_1)^{1/2} \quad (1.7)$$

Các phương trình để tìm $\Phi_{2(\beta)}$, $\Phi_{3(\beta)}$, ... là các phương trình vi phân không thuần nhất có về trái giống như về trái của phương trình (1.6), còn về phải là biểu thức tuyến tính của P_i . Không diễn giải quá trình tính toán, ta tìm được nghiệm của các phương trình này dưới dạng tổng quát:

$$\Phi_{i(\beta)} = C_i R_\beta^{-1/2} (8F^2 + 6P_1)^{-1/2} (F^2 + P_1)^{1/2} + P_i \Psi_{i(\beta)} + G_{i(\beta)} \quad (1.8)$$

$\Psi_{i(\beta)}$ và $G_{i(\beta)}$ là các hàm đã biết khi tìm $\Phi_{i(\beta)}$ (là nghiệm của phương trình không thuần nhất), C_i là hằng số tích phân xác định theo điều kiện biên.

Theo những phương trình vừa trình bày ở trên, có thể nêu ra nhận xét về định tính dạng nghiệm của bài toán như sau:

Hàm ứng suất $\Phi_{(\beta)}$ dùng để xác định các ứng lực trong vỏ, nếu tồn tại thì phải là những hàm thực, và do đó các thành phần $\Phi_{i(\beta)}$ của nó cũng phải là những hàm thực; giá trị áp lực P cũng như các thành phần P_i của nó phải là số thực và dương. Hàm $f_{(\beta)}$ hoặc đạo hàm của nó $f'_{(\beta)} = F$ có thể là thực, phức tùy theo giá trị các hệ số của phương trình (1.4). Nếu ta tìm được một bộ ba thông số P, f, Φ thỏa mãn các tính chất kể trên thì P chính là lực tới hạn của vỏ, là nghiệm của bài toán ổn định.

Ở gần đúng thứ nhất, ta cần xác định giá trị thực của P_1 sao cho, ứng với nó, nghiệm F của phương trình (1.4) và, do đó, hàm f theo (1.5) sẽ làm cho hàm Φ xác định theo (1.7) là thực. Lúc này ta gặp những phương trình thuần nhất.

Ở các gần đúng tiếp sau, ta cũng xác định các giá trị thực P_i ($i = 2, 3, \dots$) có những tính chất nêu trên. Lúc này các phương trình là những phương trình không thuần nhất.

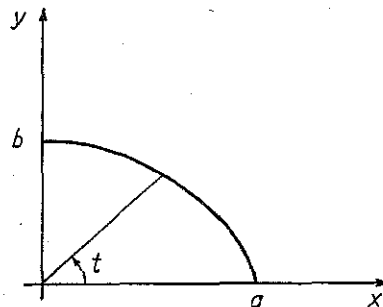
Đối với vỏ trụ có mặt cắt ngang là hở, ta cần sử dụng điều kiện biên trên các cạnh song song đường sinh (khi $\beta = 0$ và $\beta = \beta_0$) để xác định các hằng số C_i trong biểu thức (1.8) của hàm Φ . Còn đối với vỏ trụ có mặt cắt ngang là kín thì các điều kiện biên này không tồn tại, việc giải bài toán có thể đơn giản hơn.

Một điểm cần lưu ý là các giá trị gần đúng thứ nhất, thứ hai ... của lực tới hạn sẽ rất gần nhau theo biểu thức phân tích của P (1.4). Điều này cho thấy rõ ưu điểm của phương pháp vừa kiến nghị.

Sau đây, ta sẽ xét những ví dụ áp dụng cụ thể cho vỏ trụ có mặt cắt ngang kín và mặt cắt ngang hở.

2. BÀI TOÁN VỎ TRỤ KÍN CÓ MẶT CẮT NGANG HÌNH ELLIP

Phương trình mặt trung bình của vỏ cho trên hình 1 sẽ là



Hình 1

$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t \quad (a > b) \end{aligned}$$

Do tính đối xứng, ta chỉ khảo sát một phần từ mặt phẳng $0 \leq t \leq \pi/2$
Giả thiết tính với các thông số của vỏ: $k = 1, a = 2, b = 1, B = 1$

$$R_{\beta}^2 = \frac{(4 \sin^2 t + \cos^2 t)^3}{4}$$

Tính gần đúng thứ nhất của lực tới hạn P_1 sao cho nghiệm của phương trình (1.5) sẽ cho nghiệm thực của phương trình (1.7).

Trong trường hợp đang xét, phương trình (1.5) sẽ có dạng:

$$F^8 + P_1 F^6 + \frac{4}{4 \sin^2 t + \cos^2 t} = 0 \quad (2.1)$$

Dạng nghiệm F phụ thuộc vào giá trị của P_1 và biến số tọa độ t , kết quả phân tích dạng nghiệm F cho trong bảng 1.

Bảng 1

Giá trị P_1		Hình thức nghiệm F		
0,8		Phức trên toàn bề mặt vỏ		
1,0	$t = 0 \div 60^\circ$	8 trị số phức	$t = 60 \div 90^\circ$	4 phức, 4 thuần ảo
1,2	$t = 0 \div 48^\circ$	8 trị số phức	$t = 48 \div 90^\circ$	4 phức, 4 thuần ảo
1,4	$t = 0 \div 36^\circ$	8 trị số phức	$t = 36 \div 90^\circ$	4 phức, 4 thuần ảo
1,6	$t = 0 \div 30^\circ$	8 trị số phức	$t = 30 \div 90^\circ$	4 phức, 4 thuần ảo
1,8	$t = 0 \div 24^\circ$	8 trị số phức	$t = 24 \div 90^\circ$	4 phức, 4 thuần ảo
2,0	$t = 0 \div 20^\circ$	8 trị số phức	$t = 20 \div 90^\circ$	4 phức, 4 thuần ảo
2,2	$t = 0 \div 14^\circ$	8 trị số phức	$t = 14 \div 90^\circ$	4 phức, 4 thuần ảo
2,4	$t = 0 \div 6^\circ$	8 trị số phức	$t = 6 \div 90^\circ$	4 phức, 4 thuần ảo
2,6		Thuần ảo trên toàn bề mặt vỏ		

Trên cơ sở xét định tính dạng nghiệm $F = f'$ ghi trên bảng 1 ta kết luận

- Với giá trị $P_1 = 0,8$ nghiệm là phức trên toàn bộ mặt vỏ, theo (1.7) và (1.4) các giá trị của Φ cũng là phức, điều này trái với giả thiết, ý nghĩa của hàm ứng suất không thứ nguyên Φ , Vỏ vẫn ổn định.

- Với giá trị $P_1 = 1$ thì trên đoạn $0 \leq t \leq 60^\circ$ hàm Φ cũng không có giá trị thực, chỉ trên đoạn $60^\circ \leq t \leq 90^\circ$ hàm f' mới có giá trị thuần ảo, và do đó hàm Φ có giá trị thực. Chứng tỏ rằng với $P = 1$ trên miền $60^\circ \leq t \leq 90^\circ$ xuất hiện các nếp nhăn, vỏ mất ổn định cục bộ.

- Khi giá trị P_1 tăng thì miền ổn định sẽ lan rộng cho tới khi $P_1 = 2,6$ thì miền này lan ra toàn bộ bề mặt của vỏ.

- Tăng khoảng chia của P_1 trong đoạn $(1 \div 2,6)$ ta sẽ có thể nhận được các kết quả chính xác hơn và theo dõi được tỉ mỉ hơn quá trình hình thành các nếp nhăn, miền mất ổn định của vỏ.

3. BÀI TOÁN ĐỐI VỚI TRỤ HỖ

Khi xét vỏ trụ hỡ, ta cần dựa thêm vào các điều kiện trên các biên song song đường sinh $\beta =$ hằng số). Ví dụ: tại $\beta = 0$ và $\beta = \beta_0$ vỏ trụ được ngàm chặt thì:

$$u = v = w = \frac{\partial W}{\partial \beta} = 0$$

Hoặc do đó:

$$\Phi''_{(\beta)} = \Phi'''_{(\beta)} = \Phi^{IV}_{(\beta)} = \Phi^V_{(\beta)} = 0 \quad (3.1)$$

Thay các biểu thức của hàm Φ vào (3.1) ta nhận được hệ phương trình đại số đối với các hằng số C_i như sau:

$$\begin{aligned}
H''[F_1(0, P_1)]C_{11} + H''[F_2(0, P_1)]C_{12} + \dots + H''[f_8(0, P_1)]C_{18} &= 0 \\
H''[F_1(\beta_0, P_1)]C_{11} + H''[F_2(\beta_0, P_1)]C_{12} + \dots + H''[f_8(\beta_0, P_1)]C_{18} &= 0 \\
H^{III}[F_1(0, P_1)]C_{11} + H^{III}[F_2(0, P_1)]C_{12} + \dots + H^{III}[f_8(0, P_1)]C_{18} &= 0 \\
H^{III}[F_1(\beta_0, P_1)]C_{11} + H^{III}[F_2(\beta_0, P_1)]C_{12} + \dots + H^{III}[f_8(\beta_0, P_1)]C_{18} &= 0 \quad (3.3) \\
H^{IV}[F_1(0, P_1)]C_{11} + H^{IV}[F_2(0, P_1)]C_{12} + \dots + H^{IV}[f_8(0, P_1)]C_{18} &= 0 \\
H^{IV}[F_1(\beta_0, P_1)]C_{11} + H^{IV}[F_2(\beta_0, P_1)]C_{12} + \dots + H^{IV}[f_8(\beta_0, P_1)]C_{18} &= 0 \\
H^V[F_1(0, P_1)]C_{11} + H^V[F_2(0, P_1)]C_{12} + \dots + H^V[f_8(0, P_1)]C_{18} &= 0 \\
H^V[F_1(\beta_0, P_1)]C_{11} + H^V[F_2(\beta_0, P_1)]C_{12} + \dots + H^V[f_8(\beta_0, P_1)]C_{18} &= 0
\end{aligned}$$

Trong đó ký hiệu H là một hàm biểu diễn qua các giá trị f' , P_1 , R_β có dạng (Đã ký hiệu $F = f'$)

$$H = F_\beta^{-7/2} (8F_\beta^2 + 6P_1)^{-1/2} (F_\beta^2 + P_1)^{1/2} R^{1/2} \quad (3.4)$$

Để có nghiệm C_{ij} không đồng nhất bằng không, định thức các hệ số của C_{ij} trong phương trình (3.3) phải bằng không. Giải định thức này chúng ta nhận được các giá trị của lực tới hạn P_1 .

Để tính các giá trị gần đúng tiếp theo của lực tới hạn P_1 ta cũng dùng hệ phương trình có vẻ trái giống như vẻ trái của phương trình (3.3), còn vẻ phải là các biểu thức tuyến tính của P_1 . Tổ hợp các giá trị của P_1 theo biểu thức (1.4) ta tìm được các giá trị gần đúng cấp cao hơn của lực tới hạn.

Địa chỉ:
Trường đại học Xây dựng

Nhận ngày 4/1/1996

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Volmir A. S. Stability of deformable system (in Russian) Moscow 1967.
2. Goldelvezier A. L. Theory of elastic shell (in Russian) Moscow 1953.
3. Kuros A. G. Linear algebra (in Russian) Moscow 1971.

SUMMARY

A METHOD TO SOLVE STABILITY PROBLEM OF NONLINEAR CYLINDRICAL SHELL UNDER TRANSVERSAL LOAD

The stability problem of the cylindrical shell was studied by many researches, but most of those shells were circular. The present article considers a method to determine the critical load of noncircular cylindrical shell with the open or close section. The author used the small parameter method to obtain the stability equation of the shell. Analyzing quality of the solution, author determines the critical value of the transversal load for a shell with a elliptic close cross section and for a open shell.