Tạp chí CƠ HỌC 1981 số 3 (trang 26 – 32)

SO SÁNH PHƯƠNG PHÁP GIẢ ĐỊNH CHUẨN VÀ PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH HÓA THỐNG KÊ TRONG DAO ĐỘNG NGẪU NHIÊN

NGUYỄN CAO MỆNH

MỘT trong các phương pháp thông dụng để khảo sát dao động ngẫu nhiên của hệ phi tuyến là phương pháp tuyến tính hóa thống kê. Nội dung của phương pháp này là thay hệ phi tuyến bởi hệ tuyến tính với các hệ số được xác định sao cho giá trị bình phương trung bình của hiệu giữa thành phần phi tuyến và thành phần tuyến tính tương ứng đạt giá trị cực tiểu. Trong ứng dụng phương pháp này chỉ khảo sát nghiệm dừng của hệ chịu kích động của quá trình ngẫu nhiên dừng, chuẩn [1].

Mặt khác đối với những hệ cơ học chịu tác dụng của quá trình ngẫu nhiên dừng chuẩn, người ta có thể dùng phương pháp giả định chuẩn [2, 3, 4]. Thực chất của phương pháp này là coi đáp ứng của hệ là quá trình ngẫu nhiên chuẩn với các tham số được xác định sao cho thỏa mãn các phương trình mô tả hệ thực.

Dưới đây chúng ta sẽ dùng cách biểu diễn bán bất biến (hay còn gọi là cumulant) của quá trình ngẫu nhiên [5] để rút ra công thức tổng quát cho phương pháp giả định chuẩn đối với hệ một và nhiều bậc tự do. Từ đó, có thể chỉ ra rằng khi nào phương pháp giả định chuẩn khác với phương pháp tuyến tính hóa thống kê và khi nào hai phương pháp này trùng nhau.

§ 1. HỆ MỘT BẬC TỰ DO

Đầu tiên ta xét hệ một bậc tự do biểu diễn bởi phương trình

$$\ddot{X} + 2h\dot{X} + \omega_o^2 X + \alpha F(X, \dot{X}) = \xi(t) \qquad (1.1)$$

hay

$$D_t X + \alpha F(X, \dot{X}) = \xi(t) \qquad (1.2)$$

trong đó $\xi(t)$ là quá trình ngẫu nhiên chuẩn, dừng có kỳ vọng toán học bằng không và hàm tương quan $\langle \xi(t), \xi(t+\tau) \rangle = R_\xi(\tau)$, và

$$D_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2h\frac{\partial}{\partial t} + \omega_o^2$$

Lấy biến độc lập trong phương trình (1.2) là t_1, sau đó là t_2 và dùng các ký hiệu

$$X(t_i) = X_i, \quad \dot{X}(t_i) = \dot{X}_i, \quad D_{t_i} = D_i, \quad F(X_i, \dot{X}_i) = F_i \quad (i = 1, 2) \qquad (1.3)$$

sau đó thiết lập bán bất biến ở hai vế phương trình (1.2) ta nhận được:

$$\langle D_1X_1 + \alpha F(X_1, \dot{X}_1), D_2X_2 + \alpha F(X_2, \dot{X}_2) \rangle = \langle \xi(t_1), \xi(t_2) \rangle = R_\xi(t_2 - t_1) \qquad (1.4)$$

Theo tính chất của bán bất biến ta có:

$$D_1D_2\langle X_1, X_2\rangle + \alpha D_1\langle X_1, F_2\rangle + \alpha D_2\langle X_2, F_1\rangle + \alpha^2\langle F_1, F_2\rangle = R_\xi(t_2 - t_1) \qquad (1.5)$$

Theo công thức khai triển bán bất biến [5] (trang 85)

$$\langle X_1, F_2\rangle = \left\langle\frac{\partial F_2}{\partial X_2}\right\rangle\langle X_1, X_2\rangle + \left\langle\frac{\partial F_2}{\partial \dot X_2}\right\rangle\langle X_1, \dot X_2\rangle + \sum_{k+l\geq 2}^{\infty}\sum^{\infty}\frac{1}{k!\,l!}\left\langle\frac{\partial^{k+l}F_2}{\partial X_2^k\partial \dot X_2^l}\right\rangle \varkappa_{1,k,l}^{X_1, X_2, \dot X_2} \qquad (1.6)$$

$$\langle X_2, F_1\rangle = \left\langle\frac{\partial F_1}{\partial X_1}\right\rangle\langle X_1, X_2\rangle + \left\langle\frac{\partial F_1}{\partial \dot X_1}\right\rangle\langle \dot X_1, X_2\rangle + \sum_{k+l\geq 2}^{\infty}\sum^{\infty}\frac{1}{k!\,l!}\left\langle\frac{\partial^{k+l}F_1}{\partial X_1^k\partial \dot X_1^l}\right\rangle \varkappa_{1,k,l}^{X_2, X_1, \dot X_1} \qquad (1.7)$$

$$\begin{aligned}\langle F_1, F_2\rangle = {} & \left\langle\frac{\partial F_1}{\partial X_1}\right\rangle\left\{\left\langle\frac{\partial F_2}{\partial X_2}\right\rangle\langle X_1, X_2\rangle + \left\langle\frac{\partial F_2}{\partial \dot X_2}\right\rangle\langle X_1, \dot X_2\rangle + \sum_{k+l\geq 2}^{\infty}\sum^{\infty}\frac{1}{k!\,l!}\left\langle\frac{\partial^{k+l}F_2}{\partial X_2^k\partial \dot X_2^l}\right\rangle \varkappa_{1,k,l}^{X_1, X_2, \dot X_2}\right\} \\ & + \left\langle\frac{\partial F_1}{\partial \dot X_1}\right\rangle\left\{\left\langle\frac{\partial F_2}{\partial X_2}\right\rangle\langle \dot X_1, X_2\rangle + \left\langle\frac{\partial F_2}{\partial \dot X_2}\right\rangle\langle \dot X_1, \dot X_2\rangle + \sum_{k+l\geq 2}^{\infty}\sum^{\infty}\frac{1}{k!\,l!}\left\langle\frac{\partial^{k+l}F_2}{\partial X_2^k\partial \dot X_2^l}\right\rangle \varkappa_{1,k,l}^{\dot X_1, X_2, \dot X_2}\right\} \\ & + \sum_{k+l\geq 2}^{\infty}\sum^{\infty}\frac{1}{k!\,l!}\left\langle\frac{\partial^{k+l}F_1}{\partial X_1^k\partial \dot X_1^l}\right\rangle \varkappa_{1,k,l}^{F_2, X_1, \dot X_1}\end{aligned} \qquad (1.8)$$

trong đó $\varkappa_{1,k,l}$ là ký hiệu bán bất biến bậc $1 + k + l$.

Thay (1.6), (1.7) và (1.8) vào (1.5) và ký hiệu:

$$\mathcal{D}_i = D_i + \alpha\left\langle\frac{\partial F_i}{\partial \dot X_i}\right\rangle\frac{\partial}{\partial t_i} + \alpha\left\langle\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\right\rangle \quad (i = 1, 2) \qquad (1.9)$$

ta nhận được phương trình

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\langle X_1, X_2\rangle & + \alpha\sum_{k+l\geq 2}^{\infty}\sum^{\infty}\frac{1}{k!\,l!}\left[\left\langle\frac{\partial^{k+l}F_1}{\partial X_1^k\partial \dot X_1^l}\right\rangle\varkappa_{1,k,l}^{X_2, X_1, \dot X_1} + \right. \\ & \left. + \left\langle\frac{\partial^{k+l}F_2}{\partial X_2^k\partial \dot X_2^l}\right\rangle\left((\alpha+1)\varkappa_{1,k,l}^{X_1, X_2, \dot X_2} + \alpha\varkappa_{1,k,l}^{\dot X_1, X_2, \dot X_2}\right)\right] + \\ & + \alpha^2\sum_{k+l\geq 2}^{\infty}\sum^{\infty}\frac{1}{k!\,l!}\left\langle\frac{\partial^{k+l}F_1}{\partial X_1^k\partial \dot X_1^l}\right\rangle\varkappa_{1,k,l}^{F_2, X_1, \dot X_1} = R_\xi(t_2 - t_1)\end{aligned} \qquad (1.10)$$

Nếu giả thiết tìm nghiệm gần đúng của (1.1) dưới dạng phân bố chuẩn [6] thì các bán bất biến bậc lớn hơn hai của $X_1, X_2, \dot X_1, \dot X_2$ sẽ bằng không. Khi đó phương trình (1.10) trở thành:

$$\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 R(t_1,t_2) + \alpha^2 \sum\sum_{k+l\geq 2}^{\infty\ \infty} \frac{1}{k!\,l!}\left\langle \frac{\partial^{k+l}F_1}{\partial X_1^k \partial \dot{X}_1^l}\right\rangle \varkappa_{1,\,k,\,l}^{F_2,\,X_1,\,\dot{X}_1} = R_\xi(t_2-t_1) \quad (1.11)$$

đó ký hiệu $\langle X_1, X_2\rangle = R(t_1, t_2)$

ỉ xét nghiệm dừng thì (1.11) trở thành

$$\mathcal{D}_\tau \overline{\mathcal{D}}_\tau R(\tau) + \alpha^2 \sum\sum_{k+l\geq 2}^{\infty\ \infty} \frac{1}{k!\,l!}\left\langle \frac{\partial^{k+l}F_1}{\partial X_1^k \partial \dot{X}_1^l}\right\rangle \varkappa_{1,\,k,\,l}^{F_2,\,X_1,\,\dot{X}_1} = R_\xi(\tau) \quad (1.12)$$

đó $\overline{\mathcal{D}}_\tau$ có dạng như $\mathcal{D}_\tau$, nhưng các hệ số của đạo hàm bậc nhất theo τ đều đổi dấu.

công thức (1.12) nếu $F(X, \dot{X})$ là đa thức của X và $\dot{X}$ thì tổng trên chỉ là hữu hạn. ường hợp riêng

$$F(X, \dot{X}) = F(X) + G(\dot{X}) \quad (1.13)$$

ó phương trình (1.11) trở thành :

$R(t_1t_2) +$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\left\langle \frac{d^kF_1}{dX_1^k}\right\rangle\left(\varkappa_{1,\,k}^{F_2,\,X_1} + \varkappa_{1,\,k}^{G_2,\,X_1}\right) + \left\langle \frac{d^kG_1}{d\dot{X}_1^k}\right\rangle\left(\varkappa_{1,\,k}^{F_2,\,\dot{X}_1} + \varkappa_{1,\,k}^{G_2,\,\dot{X}_1}\right)\right] = R_\xi(t_2-t_1) \quad (1.14)$$

công thức cho trong [5] (công thức (11.24) trang 366)

$$\langle x^{[k]} f(y)\rangle = \langle f^{(k)}(y)\rangle\ \langle x, y\rangle^k$$

ai triển các bán bất biến trong (1.14) và chỉ xét trường hợp dừng ta nhận được ng trình

$$\mathcal{D}_\tau \overline{\mathcal{D}}_\tau R(\tau) + \alpha^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}\left\{\langle F^{(k)}(X)\rangle^2 [R(\tau)]^k - \langle G^{(k)}(\dot{X})\rangle^2 [R''(\tau)]^k\right\} = R_\xi(\tau) \quad (1.15)$$

vậy, chúng ta đã nhận được các dạng phương trình tổng quát (1.12) và (1.15) đối ıàm tương quan để giải bài toán phi tuyến bằng phương pháp giả định chuẩn.

Nếu ta chỉ xét những quá trình nghiệm có tính chất chuẩn đồng thời đối với kích thì ta sẽ thu được phương trình tuyến tính đơn giản.

Thật vậy, từ phương trình (1.1) ta có

$$\alpha F(X, \dot{X}) = \xi(t) - \ddot{X} - 2h\dot{X} - \omega_0^2 X$$

$$\varkappa_{1,\,k,\,l}^{F_2,\,X_1\,\dot{X}_1} = \langle X_1^{[k]}, \dot{X}_1^{[l]}, F(X_2, \dot{X}_2)\rangle = \frac{1}{\alpha}\ \langle X_1^{[k]}, \dot{X}_1^{[l]}, \xi(t_2) - \ddot{X}_2 - 2h\dot{X}_2 - \omega_0^2 X_2\rangle$$

$k + l \geq 2$ vế phải bằng không, do đó phương trình (1.12) trở thành

$$\mathcal{D}_\tau \overline{\mathcal{D}}_\tau R(\tau) = R_\xi(\tau) \quad (1.16)$$

iệu hàm mật độ phổ của quá trình nghiệm là $S(\omega)$, và của kích động là $S_\xi(\omega)$, dùng biến đổi Fourier đối với (1.16) ta nhận được

$$S(\omega) = \frac{S_\xi(\omega)}{\left|-\omega^2 + \left(2h + \alpha\left\langle \frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\right\rangle\right) i\omega + \omega_0^2 + \alpha\left\langle \frac{\partial F}{\partial X}\right\rangle\right|^2} \quad (1.17)$$

với phương trình (1.1), nếu dùng phương pháp tuyến tính hóa thống kê, ta thay

$$\alpha F(X, \dot{X}) = a + bX^o + c\dot{X}^o$$

g đó

$$X^o = X - \langle X\rangle$$

Các đại lượng a, b, c, được xác định sao cho

$$J(a, b, c) = \langle [\alpha F(X, \dot{X}) - a - bX^o - c\dot{X}^o]^2 \rangle = \min$$

Trong trường hợp X(t) là quá trình ngẫu nhiên dừng, ta tìm được

$$a = \alpha\langle F(X, \dot{X})\rangle,\ b = \alpha \frac{\langle F(X, \dot{X})\, X^o\rangle}{\langle X^{o2}\rangle},\ c = \alpha \frac{\langle F(X, \dot{X})\, \dot{X}^o\rangle}{\langle \dot{X}^{o2}\rangle}$$

Phương trình (1.1) trở thành :

$$\ddot{X}^o + (2h + c)\dot{X}^o + (\omega_0^2 + b)\, X^o = \xi(t)$$

Bằng phương pháp phổ ta tìm được

$$S(\omega) = \frac{S_\xi(\omega)}{\left| -\omega^2 + (2h + c)\, i\omega + \omega_0^2 + b\right|^2} \qquad (1.18)$$

Chú ý rằng, đối với trường hợp X(t) là chuẩn, dừng ta có [5]

$$\langle XF(X, \dot{X})\rangle = \langle F(X, \dot{X})\rangle\ \langle X\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}\right\rangle \langle X, X\rangle$$

Mặt khác

$$\langle X, X\rangle = \langle X^o, X^o\rangle = \langle X^{o2}\rangle$$

nên

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial X}\right\rangle = \frac{\langle XF(X, \dot{X})\rangle - \langle F(X, \dot{X})\rangle \langle X\rangle}{\langle X^{o2}\rangle} = \frac{\langle X^o F(X, \dot{X})\rangle}{\langle X^{o2}\rangle} = b$$

tương tự

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\right\rangle = c$$

Do đó, hai công thức (1.17) và (1.18) hoàn toàn trùng nhau. Vậy, trong trường hợp kích động ngoài là quá trình chuẩn, dừng thì phương pháp giả định chuẩn với giả thiết về tính chuẩn đồng thời của quá trìnhn ghiệm và quá trình kích động sẽ tương đương với phương pháp tuyến tính hóa thống kê.

§2. HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO

Phương pháp giả định chuẩn áp dụng cho hệ nhiều bậc tự do được trình bày trong công trình [8] một cách khá phức tạp. Từ đó khó mà có thể thấy được những điểm chung của phương pháp này và phương pháp tuyến tính hóa thống kê.

Dưới đây chúng ta sẽ trình bày phương pháp giả định chuẩn theo biểu diễn bán bất biến và sẽ thu được kết luận mở rộng trường hợp một bậc tự do.

Xét hệ n bậc tự do chịu tác dụng của véc-tơ ngẫu nhiên chuẩn được mô tả bởi phương trình

$$\ddot{X} + C\dot{X} + KX + g(X, \dot{X}) = f(t) \qquad (2.1)$$

trong đó

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{bmatrix},\ g(X\dot{X}) = \begin{bmatrix} g_1(X, \dot{X}) \\ \vdots \\ g_n(X, \dot{X}) \end{bmatrix},\ f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

f(t) là véc-tơ ngẫu nhiên chuẩn, C và K là các ma trận hằng số cấp $n \times n$.

Giả sử X(t) là véctơ ngẫu nhiên bất kỳ ta có thể suy ra từ trường hợp vô hướng
ông thức sau đây :

$$\langle X(t_1), g^T[X(t_2), \dot X(t_2)]\rangle = \langle X(t_1), X^T(t_2)\rangle \left\langle \frac{\partial g^T(t_2)}{\partial X(t_2)}\right\rangle + \langle X(t_1), \dot X^T(t_2)\rangle \left\langle \frac{\partial g^T(t_2)}{\partial \dot X(t_2)}\right\rangle +$$

$$+ \sum^{\infty}_{k_1+\dots+k_{2n}\geqslant 2}\cdots\sum^{\infty} \varkappa^{X(t_1),\, X_1(t_2),\dots,\, \dot X_n(t_2)}_{1,\, k_1,\dots,\, k_{2n}} \left\langle \frac{\partial^{k_1+\dots k_{2n}} g^T(t_2)}{\partial X_1^{k_1}(t_2)\dots \partial \dot X_n^{k_{2n}}(t_2)}\right\rangle \tag{2.3}$$

; đó

$$\varkappa^{X(t_1),\, X_1(t_2),\dots,\, \dot X_n(t_2)}_{1,\, k_1,\dots,\, k_{2n}} = \begin{bmatrix} \varkappa^{X_1(t_1),\, X_1(t_2),\dots,\dot X_n(t_2)}_{1,\, k_1,\dots k_{2n}} \\ \vdots \\ \varkappa^{X_n(t_2), X_1(t_2),\dots,\dot X_n(t_2)}_{1,\, k_1,\dots,k_{2n}} \end{bmatrix}$$

$$\left\langle \frac{\partial^{k_1+\dots+k_{2n}} g^T(t_2)}{\partial X_1^{k_1}(t_2)\dots\partial \dot X_n^{k_{2n}}(t_2)}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial^{k_1+\dots+k_{2n}}}{\partial X_1^{k_1}(t_2)\dots\partial \dot X_n^{k_{2n}}(t_2)} \left\{ g_1(t_2),\dots,g_n(t_2)\right\}\right\rangle$$

ng tự :

$$\langle g[X(t_1), \dot X(t_1)], X^T(t_2)\rangle = \left\langle\frac{\partial g(t_1)}{\partial X(t_1)}\right\rangle \langle X(t_1), X^T(t_2)\rangle + \left\langle\frac{\partial g(t_1)}{\partial \dot X(t_1)}\right\rangle \langle \dot X(t_1), X^T(t_2)\rangle +$$

$$+\sum^{\infty}_{k_1+\dots+k_{2n}\geqslant 2}\dots\sum^{\infty} \left\langle \frac{\partial^{k_1+\dots+k_{2n}} g(t_1)}{\partial X_1^{k_1}(t_1)\dots\partial \dot X_n^{k_{2n}}(t_1)}\right\rangle \varkappa^{X^T(t_2),\, X_1(t_1),\,\dots,\, \dot X_n(t_1)}_{1,\, k_1,\,\dots,\, k_{2n}} \tag{2.4}$$

$$\langle g(t_1), g(t_2)\rangle = \left\langle\frac{\partial g(t_1)}{\partial X(t_1)}\right\rangle \langle X(t_1), X^T(t_2)\rangle \left\langle\frac{\partial g^T(t_2)}{\partial X(t_2)}\right\rangle + \left\langle\frac{\partial g(t_1)}{\partial \dot X(t_1)}\right\rangle \langle \dot X(t_1), X^T(t_2)\rangle \left\langle\frac{\partial g^T(t_2)}{\partial X(t_2)}\right\rangle +$$

$$+\left\langle\frac{\partial g(t_1)}{\partial X(t_1)}\right\rangle \langle X(t_1), \dot X^T(t_2)\rangle \left\langle\frac{\partial g^T(t_2)}{\partial \dot X(t_2)}\right\rangle + \left\langle\frac{\partial g(t_1)}{\partial \dot X(t_1)}\right\rangle \langle \dot X(t_1), \dot X^T(t_2)\rangle \left\langle\frac{\partial g^T(t_2)}{\partial \dot X(t_2)}\right\rangle +$$

$$+\sum^{\infty}_{k_1+\dots+k_{2n}\geqslant 2}\dots\sum^{\infty} \frac{1}{k_1!\dots k_{2n}!} \varkappa^{X(t_1),\, X_2(t_2),\,\dots,\, \dot X_n(t_2)}_{1,\, k_1,\,\dots,\, k_{2n}} \left\langle \frac{\partial^{k_1+\dots+k_{2n}} g^T(t_2)}{\partial X_1^{k_1}(t_2)\dots\partial \dot X_n^{k_{2n}}(t_2)}\right\rangle$$

$$+\sum^{\infty}_{k_1+\dots+k_{2n}\geqslant 2}\dots\sum^{\infty} \frac{1}{k_1!\dots k_{2n}!} \varkappa^{\dot X(t_1),\, X_1(t_2),\,\dots,\, \dot X_n(t_2)}_{1,\, k_1,\,\dots,\, k_{2n}} \left\langle \frac{\partial^{k_1+\dots+k_{2n}} g^T(t_2)}{\partial X_1^{k_1}(t_2)\dots\partial \dot X_n^{k_{2n}}(t_2)}\right\rangle$$

$$+\sum^{\infty}_{k_1+\dots+k_{2n}\geqslant 2}\dots\sum^{\infty} \frac{1}{k_1!\dots k_{2n}!} \left\langle \frac{\partial^{k_1+\dots+k_{2n}} g(t_1)}{\partial X_1^{k_1}(t_1)\dots\partial \dot X_n^{k_{2n}}(t_1)}\right\rangle \varkappa^{g^T(t_2),\, X_1(t_1),\,\dots,\, \dot X_n(t_1)}_{1,\, k_1,\,\dots,\, k_{2n}} \tag{2.5}$$

phương trình (2.1) lập phương trình bán bất biến :

$$\langle D_1X(t_1) + g(t_1),\ X^T(t_2)D_2^T + g^T(t_2)\rangle = \langle f(t_1),\ f^T(t_2)\rangle \tag{2.6}$$

ng đó

$$D_i = I\frac{\partial^2}{\partial t_i^2} + C\frac{\partial}{\partial t_i} + K \tag{2.7}$$

I là ma trận đơn vị

(2.6) ta có

$$D_1\langle X(t_1), X^T(t_2)\rangle D_2^T + D_1\langle X(t_1), g^T(t_2)\rangle + \langle g(t_1), X^T(t_2)\rangle D_2^T +$$

$$+ \langle g(t_1), g^T(t_2)\rangle = \langle f(t_1), f^T(t_2)\rangle \tag{2.8}$$

Thay các công thức (2.3) – (2.5) vào (2.8) sau khi rút gọn ta nhận được:

$$\left\{D_1+\left\langle\frac{\partial g(t_1)}{\partial \dot{X}(t_1)}\right\rangle\frac{\partial}{\partial t_1}+\left\langle\frac{\partial g(t_1)}{\partial X(t_1)}\right\rangle\right\}\langle X(t_1),\ X^T(t_2)\rangle\left\{D_2^T+\left\langle\frac{\partial g^T(t_2)}{\partial \dot{X}(t_2)}\right\rangle\frac{\partial}{\partial t_2}+\right.$$

$$\left.\left\langle\frac{\partial g^T(t_2)}{\partial X(t_2)}\right\rangle\right\}+\sum^{\infty}\dots\sum^{\infty}_{k_1+\dots+k_{2n}\geqslant 2}\frac{1}{k_1!\dots k_{2n}!}\left\{\left[2\varkappa_{1,\ k_1,\ \dots,\ k_{2n}}^{X(t_1),\ X_1(t_2),\ \dots,\ \dot{X}_n(t_2)}+\right.\right.$$

$$\left.+\varkappa_{1,\ k_1,\ \dots,\ k_{2n}}^{X(t_1),\ X_1(t_2),\dots,\ \dot{X}_n(t_2)}\right]\left\langle\frac{\partial^{k_1+\dots+k_{2n}}g^T(t_2)}{\partial X_1^{k_1}(t_2)\dots\partial \dot{X}_n^{k_{2n}}(t_2)}\right\rangle+$$

$$\left.+\left\langle\frac{\partial^{k_1+\dots+k_{2n}}g(t_1)}{\partial X_1^{k_1}(t_1)\dots\partial \dot{X}_n^{k_{2n}}(t_1)}\right\rangle\varkappa_{1,\ k_1,\ \dots,\ k_{2n}}^{X^T(t_2),\ X_1(t_2)\dots,\ \dot{X}_n(t_2)}\right\}+$$

$$+\sum^{\infty}\dots\sum^{\infty}_{k_1+\dots+k_{2n}\geqslant 2}\frac{1}{k_1!\dots k_{2n}!}\left\langle\frac{\partial^{k_1+\dots+k_{2n}}g(t_1)}{\partial X_1^{k_1}(t_1)\dots\partial \dot{X}_n(t_1)}\right\rangle\varkappa_{1,\ k_1,\dots,\ k_{2n}}^{g^T(t_2),\ X_1(t_1),\dots,\ \dot{X}_n(t_1)}=$$

$$\langle f(t_1),\ f^T(t_2)\rangle \tag{2.9}$$

Nếu ta tìm nghiệm X (t) là véc tơ ngẫu nhiên chuẩn, phương trình (2.9) trở thành

$$\left\{D_1+\left\langle\frac{\partial g(t_1)}{\partial \dot{X}(t_1)}\right\rangle\frac{\partial}{\partial t_1}+\left\langle\frac{\partial g(t_1)}{\partial X(t_1)}\right\rangle\right\}\langle X(t_1),\ X^T(t_2)\rangle\left\{D_2^T+\left\langle\frac{\partial g^T(t_2)}{\partial \dot{X}(t_2)}\right\rangle\left\langle\frac{\partial}{\partial t_2}+\frac{\partial g^T(t_2)}{\partial X(t_2)}\right\rangle\right\}+$$

$$+\sum^{\infty}\dots\sum^{\infty}_{k_1+\dots+k_{2n}\geqslant 2}\frac{1}{k_1!\dots k_{2n}!}\left\langle\frac{\partial^{k_1+\dots+k_{2n}}g(t_1)}{\partial X_1^{k_1}(t_1)\dots\partial \dot{X}_n^{k_{2n}}(t_1)}\right\rangle\varkappa_{1\ \ ,\ k_1,\ \dots,\ k_{2n}}^{g^T(t_2),\ X_1(t_1),\ \dots,\ \dot{X}_n(t_1)}=$$

$$=\langle f(t_1),\ f^T(t_2)\rangle \tag{2.10}$$

Nếu chỉ giới hạn tìm các nghiệm X(t) lập thành với f(t) véc tơ chuẩn 2n chiều phương trình (2.10) không tồn tại thành phần có dấu tổng, và có thể viết dưới dạng

$$\left[\left(D_1+\frac{\partial g(t_1)}{\partial \dot{X}(t_1)}\right)\frac{\partial}{\partial t_1}+\left\langle\frac{\partial g(t_1)}{\partial X(t_1)}\right\rangle\right]X(t_1),\ \left\{\left[D_2+\left\langle\frac{\partial g(t_2)}{\partial \dot{X}(t_2)}\right\rangle\frac{\partial}{\partial t_2}\left\langle\frac{\partial g(t_2)}{\partial X(t_2)}\right\rangle\right]X(t_2)\right\}^T\Bigg\rangle=$$

$$=\langle f(t_1),\ f^T(t_2)\rangle \tag{2.11}$$

Phương trình (2.11) có thể xem như tương ứng với phương trình tuyến tính

$$\left\{D+\left\langle\frac{\partial g}{\partial \dot{X}}\right\rangle\frac{d}{dt}+\left\langle\frac{\partial g}{\partial X}\right\rangle\right\}X(t)=f(t) \tag{2.12}$$

Như vậy, nếu tìm nghiệm X(t) của (2.1) sao cho véc tơ 2n chiều $(X(t),\ f(t))^T$ là véc tơ ngẫu nhiên chuẩn thì ta đưa được phương trình này về dạng tuyến tính (2.12).

Nếu chỉ xét quá trình dừng, các ma trận $\left\langle\frac{\partial g}{\partial \dot{X}}\right\rangle$, $\left\langle\frac{\partial g}{\partial X}\right\rangle$ là các ma trận hằng và có thể giải hệ (2.12) bằng phương pháp thông thường. Các hệ số cản và hệ số cứng bổ sung là

$$\overline{C_{ij}}=\left\langle\frac{\partial g_i}{\partial \dot{X}_j}\right\rangle,\quad \overline{K_{ij}}=\left\langle\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\right\rangle \tag{2.13}$$

Cũng giống như trong trường hợp một bậc tự do, ta có thể chứng minh được rằng các hệ số này trùng với các hệ số cho trong phương pháp tuyến tính hóa thống kê [7] và tránh được việc giải hệ 2n phương trình tuyến tính.

Địa chỉ:
Viện Cơ Học Viện KHVN

nhận ngày 20-6-1980

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Iwan W. D. and I-Min Yang** Application of statistical linearization tecchniques › nonlinear multidegree-of-freedom systems. J. of Applied Mechanics Vol. 39, N.2, 1972

2. **Iyengar R. N.** Random vibration of a second order nonlinear elastic system. J. of ound and Vibration, 40(2), 1975.

3. **Iyengar. R. N. Dash. P. K.** Random vibration analysis of stochastic time-varying ystems. J. of Sound and Vibration, 45(4), 1976.

4. **Nguyễn Cao Mệnh.** Dao động của hệ động lực chứa đặc trưng trễ chịu kích ộng ngẫu nhiên của tham số và lực ngoài. I, II. Tạp chí Cơ học, số 1-2-1979 và Số 1-1980.

5. МАЛАХОЬ. А.Н. Кумулянтный анализ случайных негаусовых процессов и их преоб- азований М., 1978

6. **Nguyên Cao Mệnh.** Về Cơ sở phươhg pháp giả định chuẩn trong dao động ngẫu hiên. Tạp chí Cơ học, số 3 4-1979.

7. **Foster E. T.** Semilinear random vibrations in discrete Systems. J. of Applied lechanics. Vol. 35, 560–564, 1968.

8. **Iyengar R. N. Dash P. K.** Study of the random vibration of nonlinear systems by ne Gaussian closure technique.

J.of Applied Mechanics Vol. 45, N.2, 1978.

SUMMARY

ON THE COMPARISON OF THE GAUSSIAN HEURISTIC WITH THE STATISTICAL LINEARIZATION METHODS IN RANDOM VIBRATIONS

In this paper the cumulant description of random processes is used for obtaining ;eneral formulae of the Gaussian heuristic method in single-degree-of-freedom and multi- legree-of-freedom systems. These formulae can be easily applied to particular cases. Whereby he Gaussian heuristic method and the statistical linearization method are compared. It :an be shown, that if the solution process and the excited process are assumed to be jointly Gaussian, then these two methods are equivalent. Besides, on the basis of the Gaussian ieuristic method, the statistical linearization coefficients are presented by more simple expressions than that in the papers [1,7].

Thông báo về Hội nghị Cơ Học...

(Tiếp trang 1)

Danh sách Ban trù bị Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ III.

Nguyễn Văn Đạo (trưởng ban), Lê Quý An (Trưởng tiểu ban cơ học đất, đá và môi trường rời), Đặng Đình Áng, Đào Huy Bích, Nguyễn Hữu Chí, Trần Lưu Chương, Cao Chí Dũng, Nguyễn Đống, Nguyễn Văn Điệp (Trưởng tiểu ban cơ học chất lỏng và chất khí), Nguyễn Văn Hồi, Phạm Huyền (Trưởng tiểu ban cơ học đại cương), Nguyễn Văn Hường (Trưởng tiểu ban cơ học vật rắn biến dạng), Phan Lê, Bùi Trọng Lựu, Nguyễn Công Mẫn, Nguyễn Cao Mệnh, Ngô Thành Phong, Nguyễn Ân Niên, Nguyễn Thiện Phúc (Trưởng tiểu ban cơ học máy), Đỗ Sanh, Đỗ Sơn, Hoàng Văn Tân, Nguyễn Hòa Thịnh, Nguyễn Thược, Lều Thọ Trình, Nguyễn Trường, Nguyễn Anh Tuấn, Phạm Hữu Vĩnh và một số cán bộ khác.