Tạp chí Cơ Học, T.VI, 1984, số 4 trang (21-25)

SÓNG LÔ-VƠ TRÊN MẶT TRỤ CỦA MÔI TRƯỜNG ĐÀN HỒI CÓ BIẾN DẠNG BAN ĐẦU THUẦN NHẤT

PHẠM THỊ OANH

Sự truyền sóng trên biên phẳng phân chia hai môi trường có biến dạng ban đầu thuần nhất đã được xét trong [1, 2]. Bài này xét sự truyền sóng Lô-vơ trên mặt trụ. Môi trường được cấu tạo từ hai loại vật liệu đàn hồi lý tưởng với thế biến dạng tùy ý. Trạng thái biến dạng ban đầu là thuần nhất. Ứng dụng lý thuyết tuyến tính hóa của A. H. Гузь [3], ta suy ra được phương trình xác định tốc độ sóng và xấp xỉ nó trong trường hợp bước sóng nhỏ hơn nhiều so với bán kính mặt trụ. Tính toán cụ thể cho trường hợp xấp xỉ trên với một vài dạng của thế biến dạng. Trong trường hợp đàn hồi tuyến tính không có biến dạng ban đầu, kết quả nhận được trở về kết quả nêu trong [4].

§ 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Xét môi trường vô hạn với lỗ hổng hình trụ bán kính R_o, bên trong lỗ hổng là trống rỗng. Mặt biên $r = R_o$ tự do đối với ứng suất. Môi trường bao gồm hai phần cấu tạo từ hai loại vật liệu khác nhau : phần 1 là một ống trụ dài vô hạn bán kính trong R_o, chiều dày h_o, phần 2 là phần còn lại của môi trường.

Ta phân biệt ba trạng thái của môi trường:

– Trạng thái tự nhiên: ứng suất, biến dạng bằng không.

– Trạng thái ban đầu: môi trường có biến dạng ban đầu thuần nhất. Các đại lượng ứng với trạng thái này ký hiệu bằng chỉ số «0».

Ví dụ : ε^o_{ij}, $\mathcal{U}^o_i$, σ^{*o}_{ij},...

– Trạng thái đã bị kích động: các đại lượng ký hiệu bằng dấu phẩy, ví dụ : $\sigma^{*'}_{ij}$, ε'_j $\mathcal{U}'_i$,..

Ta có : $\sigma^{*'}_{ij} = \sigma^{*o}_{ij} + \sigma^*_{ij}$; $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon^o_{ij} + \varepsilon_{ij}$; $\mathcal{U}'_i = \mathcal{U}^o_i + \mathcal{U}_i$.

Các đại lượng σ^*_{ij}, ε_{ij}, $\mathcal{U}_i$ là những kích động cần phải xác định. Giả thiết các kích động là bé ta có thể áp dụng lý thuyết tuyến tính hóa của A.H.Гузь.

Chọn hệ tọa độ Lagrăng trong mỗi phần trùng với hệ tọa độ trụ trong trạng thái tự nhiên $(r_{(j)}, \varphi_{(j)}, z_{(j)})$, $j = 1, 2$.

Giả thiết trạng thái biến dạng ban đầu là thuần nhất :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^o_{r(j)} &= (\lambda_{1(j)} - 1)\, r_{(j)}, \\ \mathcal{U}^o_{\varphi(j)} &= 0 \\ \mathcal{U}^o_{z(j)} &= (\lambda_{3(j)} - 1)\, z_{(j)}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

trong đó $\lambda_{1(j)}$, $\lambda_{3(j)}$ là các hằng số.

$$\sigma^{*o}_{rr(j)} = \sigma^{*o}_{\varphi\varphi(j)} = \sigma_{1(j)},$$
$$\sigma^{*o}_{zz(j)} = \sigma_{3(j)},$$

chỉ số (j) ứng với phần thứ j, j = 1, 2.

Do điều kiện liên tục của trạng thái ban đầu nên

$$\lambda_{1(1)} = \lambda_{1(2)} = \lambda_1, \qquad \sigma_{1(1)} = \sigma_{1(2)} = \sigma_1, \tag{1.2}$$

$\sigma_{3(1)}$ và $\sigma_{3(2)}$ phụ thuộc lẫn nhau.

Đưa vào hàm thế $\psi_{(j)}$, $\chi_{(j)}$, trong mỗi phần thay cho hệ phương trình xác định $\vec{\mathcal{U}}_{(j)}$ ta có hệ phương trình đối với $\psi_{(j)}$, $\chi_{(j)}$ và các điều kiện biên tương ứng [6].

Để xét sự truyền sóng « Lô-vơ » trên mặt trụ phân chia 2 phần của môi trường ta tìm kích động của chuyển dịch dưới dạng :

$$\vec{\mathcal{U}}_{(j)} = (0, \mathcal{U}_{\varphi(j)}, 0),$$

$$\mathcal{U}_{(j)} = \mathcal{U}_{(j)}(r_{(j)}, z_{(j)}, \tau).$$

Khi đó $\mathcal{U}_{(j)}$ có biểu diễn :

$$\mathcal{U}_{(j)} = -\frac{\partial}{\partial r_{(j)}}\psi_{(j)} \tag{1.3}$$

(trường hợp này $\mathcal{U}_{(j)}$ không phụ thuộc χ mà chỉ phụ thuộc ψ)

Theo [6] $\psi_{(j)}$ xác định từ phương trình :

$$\left(\frac{1}{r_{(j)}}\frac{\partial}{\partial r_{(j)}} + \frac{\partial^2}{\partial r_{(j)}^2} + M_{(j)}\frac{\partial^2}{\partial z_{(j)}^2} - L_{(j)}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)\psi_{(j)} = 0,\ j = 1, 2, \tag{1.4}$$

trong đó

$$M_{(j)} = \frac{\mu_{13(j)} + \sigma_{3(j)}\lambda_1^{-2}}{\mu_{12(j)} + \sigma_1\lambda_1^{-2}}, \quad L_{(j)} = \frac{\rho_{(j)}\lambda_1^{-2}}{\mu_{12(j)} + \sigma_1\lambda_1^{-2}}, \tag{1.5}$$

$\rho_{(j)}$ là mật độ của phần thứ j trong trạng thái tự nhiên. Với điều kiện biên :

$$-Q_{o(1)}\frac{\partial^2\psi_{(1)}}{\partial r_{(1)}^2} + \frac{1}{r_{(1)}}\frac{\partial\psi_{(1)}}{\partial r_{(1)}}\Bigg|_{r_{(1)} = R} = 0 \tag{1.6}$$

và điều kiện liên tục trên biên phân chia 2 phần :

$$\mu_{12(1)}\left[-Q_{o(1)}\frac{\partial^2\psi_{(1)}}{\partial r_{(1)}^2} + \frac{1}{r_{(1)}}\frac{\partial\psi_{(1)}}{\partial r_{(1)}}\right]\Bigg|_{r_{(1)} = (R+h)^-} = \mu_{12(2)}\left[-Q_{o(2)}\frac{\partial^2\psi_{(2)}}{\partial r_{(2)}^2} + \frac{1}{r_{(2)}}\frac{\partial\psi_{(2)}}{\partial r_{(2)}}\right]\Bigg|_{r_{(2)} = (R+h)^+},$$

$$-\frac{\partial}{\partial r_{(1)}}\psi_{(1)}\Bigg|_{r_{(1)} = (R+h)^-} = -\frac{\partial}{\partial r_{(2)}}\psi_{(2)}\Bigg|_{r_{(2)} = (R+h)^+}, \tag{1.7}$$

trong đó $Q_{o(j)} = 1 + \sigma_1\lambda^{-2}\mu_{1}^{-1}{}_{(j)}$,

$\mu_{ik(j)}$ là hằng số phụ thuộc vào vật liệu và trạng thái ban đầu trong phần thứ j. $(j = 1, 2)$,

$$R = \lambda_1^{-1}R_o,\ h = \lambda_1^{-1}h_o.$$

§ 2. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Đưa vào hệ tọa độ mới (r, φ, z) trong trạng thái ban đầu :

$$r = \lambda_1 r_{(1)} = \lambda_1 r_{(2)}, \quad \varphi = \varphi_{(1)} = \varphi_{(2)}, \quad z = \lambda_{3(1)}z_{(1)} = \lambda_{3(2)}z_{(2)} \tag{2.1}$$

Khi đó phương trình (1.4) đưa về :

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + M\frac{\partial^2}{\partial z^2} - L\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)\psi = 0, \tag{2.2}$$

trong đó
$$\psi = \begin{cases} \psi_{(1)} - r \in [R_o, R_o + h_o] \\ \psi_{(2)} - r \in (R_o + h_o, \infty) \end{cases} \tag{2.3}$$

$$M = \begin{cases} M_{(1)} \lambda^2_{3(1)}/\lambda_1^2 \equiv M_1 - r \in [R_o, R_o + h_o] \\ M_{(2)} \lambda^2_{3(2)}/\lambda_1^2 \equiv M_2 - r \in (R_o + h_o, \infty) \end{cases}$$

$$L = \begin{cases} \dfrac{\rho_{o(1)} \lambda_1^{-2} \lambda^{-1}_{3(1)}}{\mu_{12(1)} + \sigma_1 \lambda_1^{-2}} \equiv L_1 - r \in [R_o, R_o + h_o] \\ \dfrac{\rho_{o(2)} \lambda_1^{-2} \lambda^{-1}_{3(2)}}{\mu_{12(2)} + \sigma_1 \lambda_1^{-2}} \equiv L_2 - r \in (R_o + h_o, \infty) \end{cases}$$

$\rho_{o(j)}$ mật độ của phần j trong trạng thái ban đầu. Khi đó từ (1.3) suy ra :

$$U = -\lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial r} \left(u = \begin{cases} U_{(1)} - r \in [R_o, R_o + h_o] \\ U_{(2)} - r \in (R_o + h_o, \infty) \end{cases} \right)$$

(1.5), (1.7) trở về hệ :

$$-Q_{o(1)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \bigg|_{r = R_o} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \psi \bigg|_{r = (R_o + h_o)^-} = \frac{\partial}{\partial r} \psi \bigg|_{r = (R_o + h_o)^+},$$

$$\mu_{12(1)} \left[-Q_{o(1)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] \bigg|_{r = (R_o + h_o)^-} =$$

$$\mu_{12(2)} \left[-Q_{o(2)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] \bigg|_{r = (R_o + h_o)^+}. \tag{2.4}$$

Ta tìm nghiệm (2.2) với điều kiện (2.4) dưới dạng :

$$\psi = \begin{cases} f_1(r) e^{ik(z - c\tau)} - r \in [R_o, R_o + h_o] \\ f_2(r) e^{ik(z - c\tau)} - r \in (R_o + h_o, \infty) \end{cases} \tag{2.5}$$

Thế (2.5) vào (2.2) ta dẫn ra phương trình xác định $f_j(r)$, $j = 1, 2$.

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2} - M_j k^2 + L_j k^2 C^2 \right) f_j(r) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Nghiệm thỏa mãn điều kiện tắt dần $f_2(r) \to 0$ $(r \to \infty)$ của phương trình này là :

$$f_2(r) = A_2 K_o(\beta_2 r),$$
và
$$f_1(r) = A_1 J_o(\beta_1 r) + B_1 N_o(\beta_1 r), \tag{2.6}$$

J_o, N_o, K_o là các hàm trụ,

A_2, A_1, B_1 là các hằng số, $\beta_j = \alpha_j \left| \sqrt{|\beta_j^2|} \right|$, $\alpha_j = \begin{cases} 1 - \beta_j^2 > 0 \\ i - \beta_j^2 < 0 \end{cases}$

$$\beta_2^2 = k^2(M_2 - L_2 C^2)\ ;\ \beta_1^2 = k^2(L_1 C^2 - M_1).$$

Để $f_2(r)$ tắt dần thì $\beta_2^2 > 0$.

Thế (2.6) vào (2.4) ta có :

$$Q_{o(1)} \beta_1^2 \left[A_1 \left(J_o(r_o) - \frac{1}{r_o} J_1(r_o) \right) + B_1 \left(N_o(r_o) - \frac{1}{r_o} N_1(r_o) \right) \right] -$$

$$- \beta_1^2 [A_1 J_1(r_o) + B_1 N_1(r_o)]/r_o = 0,$$

$$\beta_1 [A_1 J_1(r_1) + B_1 N_1(r_1)] = A_2 \beta_2 K_1(r_2),$$

$$\mu_{12(1)}Q_{o(1)}\beta_1^2\left[A_1\left(J_o(r_1)-\frac{1}{r_1}J_1(r_1)\right)+B_1\left(N_o(r_1)-\frac{1}{r_1}N_1(r_1)\right)\right]-\mu_{12(1)}\beta_1^2[A_1J_1(r_1)$$

$$+B_1N_1(r_1)]/r_1+\mu_{12(2)}Q_{o(2)}\beta_2^2\left[K_o(r_2)+\frac{1}{r_2}K_1(r_2)\right]A_2$$

$$+\mu_{12(2)}\beta_2^2\frac{1}{r_2}K_1(r_2)A_2=0, \qquad (2.7)$$

Trong đó $r_o=\beta_1R_o$; $r_1=\beta_1(R_o+h_o)$; $r_2=\beta_2(R_o+h_o)$.

Biến đổi hệ trên về hệ :

$$\left[Q_{o(1)}J_o(r_o)-\frac{1+Q_{o(1)}}{r_o}J_1(r_o)\right]A_1+\left[Q_{o(1)}N_o(r_o)-\frac{1+Q_{o(1)}}{r_o}N_1(r_o)\right]B_1=0,$$

$$[\mu_{12(1)}Q_{o(1)}\beta_1J_o(r_1)-\gamma J_1(r_1)]A_1+[\mu_{12(1)}Q_{o(1)}\beta_1N_o(r_1)-\gamma N_1(r_1)]B_1=0, \qquad (2.8)$$

trong đó

$$\gamma=\mu_{12(1)}\frac{1+Q_{o(1)}}{r_1}\beta_1-\mu_{12(2)}Q_{o(2)}\frac{K_o(r_2)}{K_1(r_2)}-\mu_{12(2)}\frac{1+Q_{o(2)}}{r_2}\beta_2. \qquad (2.9)$$

Từ điều kiện tồn tại nghiệm không tầm thường của hệ (2.8) ta dẫn đến phương trình xác định tốc độ sóng Lô-vơ :

$$\begin{vmatrix} Q_{o(1)}J_o(r_o)-\frac{1+Q_{o(1)}}{r_o}J_1(r_o) & Q_{o(1)}N_o(r_o)-\frac{1+Q_{o(1)}}{r_o}N_1(r_o) \\ \mu_{12(1)}Q_{o(1)}\beta_1J_o(r_1)-\gamma J_1(r_1) & \mu_{12(1)}Q_{o(1)}\beta_1N_o(r_1)-\gamma N_1(r_1) \end{vmatrix}=0 \qquad (2.10)$$

Giả thiết bước sóng bé hơn nhiều so với bán kính lỗ hổng.

Khi đó r_j $(j=0, 1, 2)$ khá lớn.

Dùng xấp xỉ $\quad J_n(z)\approx\sqrt{2/\pi z}\cos\left(z-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$

$$N_n(z)\approx\sqrt{2/\pi z}\sin\left(z-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$K_n(z)\approx\sqrt{\pi/2z}\,e^{-z},$$

thế vào (2.10) ta suy ra :

$$\mathrm{tg}\beta_1h_o=\mu_{12(2)}Q_{o(2)}\beta_2/\mu_{12(1)}Q_{o(1)}\beta_1. \qquad (2.11)$$

Xét các điều kiện đặt lên tốc độ sóng Lô-vơ

Từ điều kiện $\beta_2^2>0$ ta dẫn đến :

$$C^2<M_2/L_2 \qquad (2,12)$$

Đối với trường hợp xấp xỉ sóng ngắn từ (2.11) ta có :

$$\beta_1\mathrm{tg}\beta_1h_o=\frac{\mu_{12(2)}Q_{o(2)}}{\mu_{12(1)}Q_{o(1)}}\beta_2>0.$$

Vì vậy β_1 thực, hay $\quad \beta_1^2>0, \quad$ tức $C^2>M_1/L_1$.

Kết hợp lại ta có : $\quad \dfrac{M_1}{L_1}<C^2<\dfrac{M_2}{L_2}. \qquad (2.13)$

Kết luận : Tốc độ sóng Lô vơ trên mặt trụ phân chia hai phần của môi trường được xác định từ phương trình (2.10) và thỏa mãn điều kiện (2.12) (hoặc từ phương trình (2.11) và điều kiện (2.13) đối với sóng ngắn).

§ 3. XÉT CÁC TRƯỜNG HỢP CỤ THỂ

1. Trường hợp đàn hồi tuyến tính không có ứng suất ban đầu:

$$\lambda_1 = 1;\ \lambda_{3(1)} = \lambda_{3(2)} = 1;\ \sigma_1 = \sigma_{3(1)} = \sigma_{3(2)} = 0;$$
$$Q_{o(1)} = Q_{o(2)} = 1;\ \mu_{12(j)} = \mu_{(j)},\ j = 1,\ 2;$$

$\mu_{(j)}$ là hệ số lame của phần thứ j.

Từ (2.11) dẫn ra:

$$\mu_{(1)}\beta_1 \operatorname{tg}\beta_1 h_o = \mu_2\beta_2, \tag{3.1}$$

Nếu biểu diễn $\beta_i = k\nu_i$ thì (3.1) có dạng

$$\mu_{(1)}\nu_1 \operatorname{tg} kh_o\nu_1 = \mu_{(2)}\nu_2. \tag{3.2}$$

Phương trình này trùng với phương trình xác định tốc độ sóng Lô-vơ (trong trường hợp phẳng) [4].

2. Trường hợp đàn hồi phi tuyến với thế biến dạng Murnaghan.

$$\Phi = \frac{1}{2}\lambda A_1^2 + \mu A_2 + \frac{1}{3} a A_1^3 + b A_1 A_2 + \frac{1}{3} c A_3,$$

trong đó λ, μ, a, b, c là các hằng số đàn hồi, A_1, A_2, A_3 là các bất biến đại số của ten xơ biến dạng Grin.

Nếu đặt $\lambda_i^2 - 1 = l_i$, thì theo các công thức trong [3] ta xác định được:

$$\sigma_1 = l_1\left(\mu + \frac{c}{4} l_1\right) + (\lambda + b l_1)(2l_1 + l_3) + a(2l_1 + l_3)^2 + \frac{b}{4}(2l_1^2 + l_3^2),$$
$$\sigma_3 = l_3\left(\mu + \frac{c}{4} l_3\right) + (\lambda + b l_3)(2l_1 + l_3) + a(2l_1 + l_3)^2 + \frac{b}{4}(2l_1^2 + l_3^2). \tag{3.3}$$

Từ đây giải ra: $l_1 = g_1(\sigma_1, \sigma_3, \lambda, \mu, a, b, c)$,

$l_3 = g_3(\sigma_1, \sigma_3, \lambda, \mu, a, b, c)$.

Đối với phần thứ j ta có: $l_{i(j)} = g_i(\sigma_1, \sigma_{3(j)}, \lambda_{(j)}, \ldots, C_{(j)})$,

$j = 1, 2 \quad ; \quad i = 1, 3.$

Từ điều kiện liên tục về dịch chuyển $l_{1(1)} = l_{1(2)}$ ta dẫn đến:

$$g_1(\sigma_1, \sigma_{3(1)}, \lambda_{(1)}, \mu_{(1)}, a_{(1)}, b_{(1)}, c_{(1)}) =$$
$$= g_1(\sigma_1, \sigma_{3(2)}, \lambda_{(2)}, \mu_{(2)}, a_{(2)}, b_{(2)}, c_{(2)}).$$

Đẳng thức này cho mối liên hệ giữa $\sigma_{3(2)}$ và $\sigma_{3(1)}$

Như vậy cho trước σ_1, $\sigma_{3(1)}$ ta sẽ xác định được $\sigma_{3(2)}$, $l_{i(j)}$ và do đó xác định được $\mu_{ik(j)}$ theo công thức trong [3]:

$$\mu_{12(j)} = \mu_{(j)} + \frac{b_{(j)}}{2}(2l_1 + l_{3(j)}) + \frac{c_{(j)} l_1}{2}, \tag{3.4}$$

$$\mu_{13(j)} = \mu_{(j)} + \frac{b_{(j)}}{2}(2l_1 + l_{3(j)}) + \frac{c_{(j)}}{4}(l_1 + l_{3(j)}).$$

Thế các giá trị của $l_{i(j)}$, $\sigma_{i(j)}$, $\mu_{ik(j)}$ vào biểu thức của $Q_{o(j)}$, $M_{(j)}$, $L_{(j)}$ ta xác định được các hệ số của phương trình (2.11). Phương trình này có chứa số sóng k nên sóng Lô-vơ trong trường hợp trụ cũng là sóng tán sắc

Địa chỉ:
Trường Đại học Tổng hợp HN.

Nhận ngày 10/11/1983

(Xem tiếp bìa 3)