Tạp chí Cơ học T. VIII 1986 số 3 (trang 1 — 5)

BÀI TOÁN ĐỘNG CỦA NỬA MẶT PHẲNG CHỊU TÁC DỤNG LỰC Ở TRÊN BIÊN

NGUYỄN ĐĂNG BÍCH

Các phương pháp hiện có [1, 2, 3] giải được bài toán động của nửa mặt phẳng chịu tác dụng lực tập trung và lực di chuyển trên biên.

Dưới đây sử dụng phương pháp đồng nhất thức trình bày ở trong [4] để giải bài toán nói trên, với điều kiện đầu là nghiệm của bài toán Xa-đốp-xki. Trường hợp riêng điều kiện đầu là nghiệm của bài toán Flamăng, nghiệm của bài toán tìm được dưới dạng kín.

§ 1. ĐẶT BÀI TOÁN

Bài toán phẳng động đàn hồi có điều kiện đầu đặt ra như sau:

Tìm các thành phần ứng suất thỏa mãn các phương trình:

a) Phương trình chuyển động và tương thích viết theo ứng suất:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{1}{C_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\sigma=0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{1}{C_2^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right)\tau_{xy}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y}=0 \tag{1.1}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sigma_{yy}+\frac{2\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1-\nu}{C_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\sigma=0$$

Trong đó $\sigma=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}$

b) Điều kiện ứng suất ban đầu là nghiệm của bài toán Xa-đốp-xki [5].

$$\sigma=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int 2\bar{p}(\alpha)e^{-|\alpha|y+i\alpha x}d\alpha \text{ khi } t=0 \tag{1.2}$$

$$\sigma_{yy}=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int \bar{p}(\alpha)(1+|\alpha|y)e^{-|\alpha|y+i\alpha x}d\alpha \text{ khi } t=0 \tag{1.3}$$

$$\tau_{xy}=\frac{iy}{\sqrt{2\pi}}\int \bar{p}(\alpha)\alpha e^{-|\alpha|y+i\alpha x}d\alpha$$

Tích phân theo α lấy cận: $\alpha\in(-\infty,+\infty)$ (1.4)

$$\bar{p}(\alpha)=\frac{P}{\sqrt{2\pi}}J_0(a\alpha),\ \ p(x)=\frac{P}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \tag{1.5}$$

c) Điều kiện biên phù hợp:

$$\tau_{xy}=0 \text{ khi } y=0 \tag{1.6}$$

$$\sigma_{yy}=-\frac{P}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}q(t) \text{ khi } y=0 \tag{1.7}$$

Trong đó:

$$q(o) = 1 \text{ hay } \frac{1}{2\pi i}\int \overline{q}(\beta)d\beta = 1 \tag{1.8}$$

β) là ảnh của q(t) qua phép biến đổi Laplát.

Tích phân theo β lấy cận:

$$\beta \in (\beta_o - i\alpha,\ \beta_o + i\infty) \tag{1.9}$$

§2. CÁCH TÌM NGHIỆM

Đồng nhất thức để giải bài toán trên phải chứa bốn hàm tùy ý độc lập để thỏa mãn hai điều kiện đầu và hai điều kiện biên. Theo [4] đồng nhất thức đáp ứng được những đòi hỏi đó chọn như sau:

$$\sigma = \frac{-1}{i(2\pi)^{3/2}}\iint (\nu_1^2 - \nu_2^2)R_3(\alpha,\beta)e^{-\nu_1 y + i\alpha x + \beta t}d\alpha d\beta \tag{2.1}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{i(2\pi)^{3/2}}\iint\left[i\alpha\nu_1 R_3(\alpha,\beta)e^{-\nu_1 y} + \frac{1}{\nu_2}R_4(\alpha,\beta)e^{-\nu_2 y}\right]e^{i\alpha x + \beta t}d\alpha d\beta$$

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{i(2\pi)^{3/2}}\iint\Big[R_1(\alpha,\beta)\operatorname{chi}\alpha y + R_2(\alpha,\beta)\operatorname{Shi}\alpha y +$$

$$+\frac{a_2}{2}R_3(\alpha,\beta)e^{-\nu_1 y} - \frac{2i\alpha}{a_2}R_4(\alpha,\beta)e^{-\nu_2 y}\Big]e^{i\alpha x + \beta t}d\alpha d\beta.$$

Trong đó $\nu_1 = \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{C_1^2}\right)^{1/2},\ \nu_2 = \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{C_2^2}\right)^{1/2},\ a_2 = \alpha^2 + \nu_2^2$ (2.2)

Tích phân theo α, β lấy cận theo (1.4), (1.9)

Để tìm nghiệm của bài toán này trước hết ta cho thỏa mãn điều kiện (1.2).

$$-\frac{1}{i(2\pi)^{3/2}}\iint (\nu_1^2 - \nu_2^2)R_3(\alpha,\beta)e^{-\nu_1 y + i\alpha x}d\alpha d\beta$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int 2\overline{p}(\alpha)e^{-|\alpha|y + i\alpha x}d\alpha \tag{2.3}$$

Từ phương trình (2.3) ta suy ra:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\left(\frac{1}{C_2^2} - \frac{1}{C_1^2}\right)\beta^2 R_3(\alpha,\beta)e^{-\nu_1 y}d\beta = 2\overline{p}(\alpha)e^{-|\alpha|y} \tag{2.4}$$

Giải phương trình (2.4) ta tìm được:

$$R_3(\alpha,\beta) = \frac{-4C_1^2C_2^2\overline{p}(\alpha)|\alpha|}{(C_1^2 - C_2^2)\beta^3\nu_1} \tag{2.5}$$

Cho thỏa mãn điều kiện (1.6).

$$i\alpha\nu_1 R_3(\alpha,\beta) + \frac{1}{\nu_2}R_4(\alpha,\beta) = 0 \tag{2.6}$$

Từ (2.6) và (2.5) suy ra:

$$R_4(\alpha,\beta) = \frac{4C_1^2C_2^2\overline{p}(\alpha)|\alpha|i\alpha\nu_2}{(C_1^2 - C_2^2)\beta^3} \tag{2.7}$$

Cho thỏa mãn điều kiện (1.7)

$$R_1(\alpha,\beta) + \frac{a_2}{2}R_3(\alpha,\beta) - \frac{2i\alpha}{a_2}R_4(\alpha,\beta) = -\overline{p}(\alpha)\overline{q}(\beta). \tag{2.8}$$

Dựa vào (2.5), (2.7) từ (2.8) ta có:

$$R_1(\alpha, \beta) = +\overline{p}(\alpha)\left[-\overline{q}(\beta) + \frac{4C_1^2C_2^2|\alpha|D}{2(C_1^2 - C_2^2)\beta^3\nu_1 a_2}\right] \quad (2.9)$$

Trong đó $D = a_2^2 - 4\alpha^2\nu_1\nu_2$

Cho thỏa mãn điều kiện (I.3)

$$\frac{1}{i(2\pi)^{3/2}}\iint\Big[R_1(\alpha, \beta)\text{ch}i\alpha y + R_2(\alpha, \beta)\text{sh}i\alpha y + \frac{a_2}{2}R_3(\alpha, \beta)e^{-\nu_1 y_1} - \frac{2i\alpha}{a_2}R_4(\alpha, \beta)e^{-\nu_2 y}\Big]e^{i\alpha x}d\alpha d\beta =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\overline{p}(\alpha)(1 + |\alpha|y)e^{-|\alpha|y + i\alpha x}d\alpha \quad (2.10)$$

Từ phương trình (2.10) ta suy ra:

$$\text{sh}i\alpha y \cdot \frac{1}{2\pi i}\int R_2(\alpha, \beta)d\beta = -\text{ch}i\alpha y\frac{1}{2\pi i}\int R_1(\alpha, \beta)d\beta -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\iint\left[\frac{a_2}{2}R_3(\alpha, \beta)e^{-\nu_1 y} - \frac{2i\alpha}{a_2}R_4(\alpha, \beta)e^{-\nu_2 y}\right]d\beta - \overline{p}(\alpha)(1 + |\alpha|y)e^{-|\alpha|y} \quad (2.11)$$

Bây giờ ta lần lượt tính các tích phân ở vế phải của (2.11).

$$\frac{1}{2\pi i}\int R_1(\alpha, \beta)d\beta = +\overline{p}(\alpha)\left[\frac{-1}{2\pi i}\int\overline{q}(\beta)d\beta + \frac{1}{2\pi i}\int\frac{2C_1^2C_2^2|\alpha|D}{(C_1^2 - C_2^2)\beta^3\nu_1 a_2}d\beta\right] \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{2C_1^2C_2^2|\alpha|D}{(C_1^2 - C_2^2)\beta^3\nu_1 a_2}d\beta = -\frac{\text{Re}}{2\pi i}\int\frac{3C_1^2C_2^2\left[(1 + K_2^2)^2 - 4K_1K_2\right]}{(C_1^2 - C_2^2)C^3K_1(1 + K_2^2)}dc = +1 \quad (2.13)$$

Trong đó:

$$C = \frac{i\beta}{\alpha}, \quad K_1 = \left(1 - \frac{C^2}{C_1^2}\right)^{1/2}, \quad K_2 = \left(1 - \frac{C^2}{C_2^2}\right)^{1/2}. \quad (2.14)$$

Tích phân theo c lấy cận $c \in (-iC_o - \infty, -iC_o + \infty)$ (2.15)

Dựa vào (1.8), (2.13) từ (2.12) ta có:

$$\frac{1}{2\pi i}\int R_1(\alpha, \beta)d\beta = 0, \quad (2.16)$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\left[\frac{a_2}{2}R_3(\alpha, \beta)e^{-\nu_1 y} - \frac{2i\alpha}{a_2}R_4(\alpha, \beta)e^{-\nu_2 y}\right]d\beta =$$

$$= \overline{p}(\alpha)(1 + |\alpha|y)e^{-|\alpha|y} + \text{Sh}i\alpha y\,\frac{2C_1^2\overline{p}(\alpha)|\alpha|}{(C_1^2 - C_2^2)i\alpha} \quad (2.17)$$

Thay kết quả tính tích phân (2.16), (2,17), vào (2.11) ta được:

$$\frac{1}{2\pi i}\int R_2(\alpha, \beta)d\beta = \frac{2C_1^2\overline{p}(\alpha)|\alpha|}{(C_1^2 - C_2^2)i\alpha} \quad (2.18)$$

Từ (2.18) ta suy ra:

$$R_2(\alpha, \beta) = \frac{2C_1^2\overline{p}(\alpha)|\alpha|}{(C_1^2 - C_2^2)i\alpha}\overline{q}(\beta) \quad (2.19)$$

Thay $R_j(\alpha, \beta)$ với $j = \overline{1, 4}$ tính theo (2.5), (2.7), (2.9), (2.19) vào (2.1) ta được

$$\sigma = \frac{-4}{i(2\pi)^{3/2}}\iint\frac{\overline{P}(\alpha)|\alpha|}{\beta\nu_1}e^{-\nu_1 y + i\alpha x + \beta t}d\alpha d\beta,$$

$$\tau_{xy} = \frac{4}{i(2\pi)^{3/2}} \iint \frac{C_1^2 C_2^2 \overline{p}(\alpha) |\alpha| i\alpha}{(C_1^2 - C_2^2)\beta^3} \left(e^{-\nu_1 y} - e^{-\nu_2 y} \right) e^{i\alpha x + \beta t} d\alpha d\beta,$$

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{i(2\pi)^{3/2}} \iint \overline{p}(\alpha) \left\{ \left[-\overline{q}(\beta) + \frac{2C_1^2 C_2^2 |\alpha| D}{(C_1^2 - C_2^2)\beta^3 \nu_1 a_2} \right] \operatorname{ch} i\alpha y + \frac{2C_1^2 |\alpha| \overline{q}(\beta)}{(C_1^2 - CC_2^2) i\alpha} \operatorname{Sh} i\alpha y - \frac{2C_1^2 C_2^2 |\alpha| a_2}{(C_1^2 - C_2^2)\beta^3 \nu_1} e^{-\nu_1 y} + \frac{8C_1^2 C_2^2 |\alpha| \alpha^2 \nu_2}{(C_1^2 - C_2^2)\beta^3 a_2} e^{-\nu_2 y} \right\} e^{i\alpha x + \beta t} d\alpha d\beta. \qquad (2.20)$$

trong đó $p(\alpha)$ tính theo (1.5).

(2.20) là nghiệm của bài toán thỏa mãn phương trình (1.1) và các điều kiện (1.2), (1,3) và (1.6), (1.7).

§ 3. TRƯỜNG HỢP RIÊNG

Điều kiện đầu là nghiệm của bài toán Flamăng [6]:

$$\sigma = -\frac{2p}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \sigma_{yy} = -\frac{2p}{\pi} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2p}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{khi } t = 0. \qquad (3.1)$$

— Điều kiện biên phù hợp có dạng:

$$\tau_{xy} = 0, \; \sigma_{yy} = -p\delta(x)\, q(t) \text{ khi } y = 0. \qquad (3.2)$$

Nghiệm của bài toán trong trường hợp này có thể suy được từ (2.20) bằng cách cho $\overline{p}(\alpha) = \frac{p}{\sqrt{2\pi}}$ ta được

$$\sigma = \frac{-4p}{i(2\pi)^2} \iint \frac{|\alpha|}{\beta \nu_1} e^{-\nu_1 y + i\alpha x + \beta t} d\alpha d\beta,$$

$$\tau_{xy} = \frac{4p}{i(2\pi)^2} \iint \frac{C_1^2 C_2^2 |\alpha| i\alpha}{(C_1^2 - C_2^2)\beta^3} (e^{-\nu_1 y} - e^{-\nu_2 y}) e^{i\alpha x + \beta t} d\alpha d\beta, \qquad (3.3)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{p}{i(2\pi)^2} \iint \left\{ \left[-\overline{q}(\beta) + \frac{2C_1^2 C_2^2 |\alpha| D}{(C_1^2 - C_2^2)\beta^3 \nu_1 a_2} \right] \operatorname{Ch} i\alpha y + \frac{2C_1^2 |\alpha| \overline{q}(\beta)}{(C_1^2 - C_2^2) i\alpha} \operatorname{Sh} i\alpha y - \frac{2C_1^2 C_2^2 |\alpha| a_2}{(C_1^2 - C_2^2)\beta^3 \nu_1} e^{-\nu_1 y} + \frac{8C_1^2 C_2^2 |\alpha| \alpha^2 \nu_2}{(C_1^2 - C_2^2)\beta^3 a_2} e^{-\nu_2 y} \right\} e^{i\alpha x + \beta t} d\alpha d\beta.$$

Các tích phân trong (3.3) tính được và cho kết quả như sau:

$$\sigma = -\frac{2p}{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{cK_1 i q_1'} \bigg|_{c = z_1} \right],$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2p}{\pi} \frac{C_1^2 C_2^2}{C_1^2 - C_2^2} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{C^3 q_1'} \bigg|_{c = z_1} - \frac{1}{C^3 q_2'} \bigg|_{c = z_2} \right], \qquad (3.4)$$

$$\sigma_{yy} = -\left\{ \frac{1}{2} pq(t)[\delta(x + y) + \delta(x - y)] + \frac{p}{\pi} \frac{C_1^2 q(t) y}{(C_1^2 - C_2^2)(x^2 - y^2)} + \right.$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Re}\int \frac{PC_1^2C_2^2\,|\alpha|\,[(1+K_2^2)^2-4K_1K_2]}{(C_1^2-C_2^2)C^3K_1(1+K_2^2)}\,[\delta(x+y-Et)+\delta(x-y-Et)]dC+$$

$$+\frac{p}{\pi}\,\frac{C_1^2C_2^2}{C_1^2-C_2^2}\operatorname{Re}\left[\frac{1+K_2^2}{C^3K_1iq_1'}\bigg|_{c=z_1}-\frac{4K_2}{(1+K_2^2)C^3iq_2'}\bigg|_{c=z_2}\right]\Bigg\}.$$

Trong (3.4) K_1, K_2 tính theo (2.14)

$$q_m' = -t-\frac{icy}{C_m^2K_m};\quad Z_m=\frac{xt+iy\sqrt{t^2-C_m^{-2}(x^2+y^2)}}{t^2-C_m^{-2}y^2}\qquad \text{với } m=1,2.$$

(3.4) là nghiệm của bài toán thỏa mãn phương trình (1.1) và các điều kiện (3.1), (3.2)

Nghiệm biểu diễn dưới dạng (3.4) có:

$$\tau_{xy}=-\frac{2p}{\pi}\,\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}\qquad \text{khi } t=0.$$

Như vậy nghiệm (3.4) đã tự động thỏa mãn điều kiện đầu đối với τ_{xy}.

Tác giả cảm ơn giáo sư I Đào Huy Bích đã đặt bài toán và hướng dẫn hoàn thành công trình này.

Địa chỉ
Trường Đại học Tổng hợp HN.

Nhận ngày 1/8/1984

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. СМИРНОВ В. И., СОБОЛЕВ И. С. Новые методы решения плоской задачи упругих колебаний. Тр. Сейсмологического ин-та, №20, 1932.
2. СНЕДДОН И. Н., БЕРРИ Д. С. Классическая теория упругости. Физматгиз, 1961.
3. RADOK J. R. Quart. Appl — Math. Palermo, 1,57, 1952.
4. NGUYỄN ĐĂNG BÍCH. Về một phương pháp xác định nghiệm bài toán phẳng động đàn hồi dẻo. Tạp chí Cơ học số 2. 1985.
5. SADOWSKY M. Zweidimensionnale probleme der Elastizitatotheorie, ZAM, 8, N°2, 1928
6. ĐÀO HUY BÍCH. Lý thuyết đàn hồi. Nhà xuất bản Đại học và THCN. Hà nội 1979.

SUMMARY

THE DYNAMIC PROBLEM OF THE ELASTIC HALF-PLANE DUE TO A FORCE AT ITS BOUNDARY

In this paper we presents the problem so put with initial condition according to stress a-difference from the problem of boundary. This problem answer not only the condition of boundary but also the initial condition.

The problem gives solution in two cases: the initial condition is the root of Sadowsky problem and it is the root of Flamant problem.