Tạp chí Cơ Học T. X, 1988 Số 3 (trang 7 — 12)

VỀ ĐÁNH GIÁ DỊCH CHUYỂN CỦA DẦM CỨNG DẺO CHỊU TẢI TRỌNG ĐỘNG I

VŨ VĂN THẾ

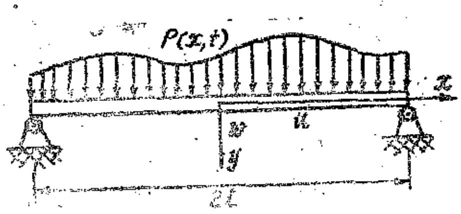
§. MỞ ĐẦU

Bài này sử dụng phương pháp trình bày trong [1] để xây dựng kỹ thuật đánh giá dưới dịch chuyển dư của dầm cứng dẻo chịu tải trọng động trong vùng biến dạng lớn. Một tham số K được đưa vào cho phép chúng ta xác định được trường ứng suất cho phép $\overline{M}, \overline{N}$ qua phương trình chuyển động mỗi khi cho trước một lớp dịch chuyển cho phép $\overline{W}$. Các trường động $\dot{W}^*, \overline{W}$ được chọn trong dạng tách biến.

Các điều kiện để chọn các hàm biên độ và hàm dạng được chỉ ra.

§ 1. THIẾT LẬP BÀI TOÁN

Xét dầm độ dài 2L bề dày 2H mật độ khối lượng ρ, chịu tác dụng của tải trọng $P(x, t)$ vuông góc với phương nằm ngang (h. 1). Các thành phần dịch chuyển theo phương vuông góc với trục của dầm và theo phương nằm ngang tương ứng là W, u. Vật liệu dầm là cứng dẻo có ứng suất giới hạn kéo là σ_o. Các nội lực trong dầm sẽ là mômen uốn $M(x, t)$, lực trục $N(x, t)$.



Hình 1

Hệ đầy đủ các phương trình mô tả bài toán về dầm bao gồm:

— Các phương trình chuyển động:

$$N' = -\rho\ddot{u}, \text{ (a)}; \; M'' - (NW')' - P(x, t) + \rho\ddot{W} = 0, \text{ (b)} \tag{1.1}$$

— Các điều kiện biên:

Đối với dầm ngàm: $u = W = \dot{u} = \dot{W} = 0$ khi $x = \pm L$. (1.2)

Đối với dầm khớp bản lề: $M = 0$, $u = \overline{W} = \dot{u} = \dot{W} = 0$ khi $x = \pm L$

— Các hệ thức hình học:

$$\dot{E} = \dot{u}' + W'\dot{W}' \; ; \; \dot{K} = \dot{W}'', \; (\;)' = \partial(\;)/\partial x \tag{1.3}$$

— Điều kiện dẻo và quy luật chảy:

$$f = \left(\frac{N}{N_o}\right)^2 + \left|\frac{M}{M_o}\right| - 1 = 0, \; N_o = 2\sigma_o H \; ; \; M_o = \sigma_o H^2.$$

$$\dot{E} = \lambda \partial f/\partial N \; ; \; \dot{K} = \lambda \partial f/\partial M, \; \lambda \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Nếu giả thiết rằng trước thời điểm ban đầu $t = 0$ dầm ở trong trạng thái yên tĩnh tức là $u(x, t) = W(x, t) = 0$, $\forall t \leqslant 0$. Hãy đánh giá dịch chuyển lớn nhất có thể xảy ra theo hướng trục Oy.

§ 2. KỸ THUẬT ĐÁNH GIÁ

Như phương pháp đã trình bày trong [1], kết quả đánh giá sẽ phụ thuộc việc chọn các trường vận tốc cho phép và dịch chuyển cho phép ; sao cho các ứng suất $\overline{M}, \overline{N}$ rút ra từ các phương trình chuyển động không phá vỡ điều kiện dẻo. Trong trường hợp bài toán dầm, để đánh giá các dịch chuyển theo hướng trục Oy ta cần chọn các trường cho phép dưới dạng sau đây :

$$\begin{aligned} &\mathring{u}^* = 0,\ \dot{W}^* \neq 0\ \forall x, t \in [-L, L], [0, \infty] \quad (a) \\ &\overline{u} = 0,\ \overline{W} \neq 0\ \forall x, t \in [-L, L], [0, \infty] \quad (b) \\ &\mathring{u}^* = \dot{W}^* = 0,\ \overline{u} = \overline{W} = 0 \text{ khi } x = \pm L,\ \forall \tau \in [0, \infty) \quad (c) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Các ứng suất cho phép xác định theo $\overline{W}$ qua phương trình chuyển động

$$\overline{N}' = 0\ ; \quad \overline{M}^{\circ\prime\prime} - \left(N \frac{\overline{W}'}{K} \right)' - \frac{P}{K} + \frac{\rho}{K} \ddot{\overline{W}} = 0 \tag{2.2}$$

Kết quả (2.2b) nhận được bằng cách chia hai vế (1.1b) cho K sau đó đặt $\overline{M}^\circ = \overline{M}/K$

Lời giải (2.2) sẽ có dạng như sau :

$$\overline{N} = F(t)\ ; \tag{2.3}$$

$$\overline{M}^\circ = F(t) \frac{\overline{W}}{K} - \frac{\rho}{K} \iint \ddot{\overline{W}}\, dxdx + \iint \frac{P}{K}\, dxdx + R(t)x + H(t)$$

K sẽ là tham số điều chỉnh cần xác định sao cho điều kiện sau được bảo đảm :

$$\left(\frac{\overline{N}}{N_0} \right)^2 + \left| \frac{\overline{M}^\circ}{M_0} \right| \leqslant 1 \quad \forall x, t \in [-L, L], [0, \infty) \tag{2.4}$$

Nhân hai vế của phương trình (2.2b) với $K\dot{W}^*$ rồi tích phân theo x và t trong khoảng $[-L, L]$, $[0, T^*]$ ta được :

$$\int_0^{T^*} \left\{ \int_{-L}^{L} \overline{M}^{\circ\prime\prime} K \dot{W}^* dx - \int_{-L}^{L} (\overline{N}\, \overline{W}')' dx \right\} dt = \int_0^{T^*} \int_{-L}^{L} (P - \rho \ddot{\overline{W}}) \dot{W}^* dxdt \tag{2.5}$$

Ở đây T^* là thời gian kết thúc chuyển động của trường vận tốc cho phép $\dot{W}^*$, tức là $\dot{W}^*(x, T^*) = 0\ \forall x \in [-L, L]$. Tích phân từng phần theo x vế trái (2.5) chúng ta thu được kết quả :

$$\int_0^{T^*} \left\{ \overline{M}^{\circ\prime} K \dot{W}^* \Big|_{-L}^{L} - \overline{N}\, \overline{W}' \dot{W}^* \Big|_{-L}^{L} - \int_{-L}^{L} (\overline{M}^{\circ\prime} K \dot{W}^{*\prime}) dx - \int_{-L}^{L} \overline{N}\, \overline{W}' \dot{W}^{*\prime} dx \right\} dt =$$

$$= \int_0^{T^*} \int_{-L}^{L} (P - \rho \ddot{\overline{W}}) \dot{W}^* dxdt \tag{2.6}$$

Hai số hạng đầu ở vế trái triệt tiêu do điều kiện (2.1c). Nếu như ta chọn $\dot{W}^*$ để $\dot{W}^{*\prime}$ có đạo hàm gián đoạn tại các điểm x, sau khi tích phân một lần nữa số hạng thứ 3 vế trái (2.6) dẫn đến hệ thức.

$$\sum_i \int_0^{T^*} K\overline{M}^\circ[\dot{W}^{*\prime}]_{x_i} dt + \int_0^{T^*}\int_{-L}^{L} K\overline{M}^\circ \dot{W}^{*\prime\prime} dxdt +$$
$$+ \int_0^{T^*}\int_{-L}^{L} \overline{N}\,\overline{W}'\dot{W}^{*\prime}\, dxdt = \int_0^{T^*}\int_{-L}^{L} (P - \rho\ddot{\overline{W}})\dot{W}^* dxdt \tag{2.7}$$

Vì $\overline{M}^\circ$; $\overline{N}$ là các trạng thái ứng suất cho phép K $[\dot{W}^{*\prime}]_{x_i}$, $K\dot{W}^{*\prime\prime}$, $\overline{W}'\,\dot{W}^{*\prime}$ được xem như là các biến dạng cho phép. do đó có thể áp dụng định đề Drucker để được kết quả sau :

$$\sum_i \int_0^{T^*} K\overline{M}^*[\dot{W}^{*\prime}]_{x_i} dt + \int_0^{T^*}\int_{-L}^{L} \overline{M}^* K\dot{W}^{*\prime\prime} dxdt +$$
$$+ \int_0^{T^*}\int_{-L}^{L} \overline{N}^*\,\overline{W}'\,\dot{W}^{*\prime} dxdt \geqslant \int_0^{T^*}\int_{-L}^{L} (P - \rho\ddot{\overline{W}})\dot{W}^* dxdt \tag{2.8}$$

Ở đây $\overline{M}^*$, $\overline{N}$ được xác định qua $K[\dot{W}^{*\prime}]_{x_i}$, $K\dot{W}^{*\prime\prime}$, $\overline{W}'\,\dot{W}^{*\prime}$ theo quy luật chảy (1.4).

Tương tự nhân hai vế của (1.1b) với $\dot{W}^*$ và thực hiện các phép tính cần thiết ta có :

$$\sum_i \int_0^{T^*} M[\dot{W}^*]'_{x_i} dt + \int_0^{T}\int_{-L}^{L} M\dot{W}^{*\prime\prime} dxdt +$$
$$+ \int_0^{T^*}\int_{-L}^{L} N\overline{W}'\dot{W}^{*\prime}\, dxdt = \int_0^{T^*}\int_{-L}^{L} (P - \rho\ddot{W})\dot{W}^* dxdt \tag{2.9}$$

Nếu như chọn sao cho $\dot{W}^* \geqslant 0$, $\ddot{W}^* \leqslant 0$ ta luôn luôn có :

$$-\int_0^{T^*}\int_{-L}^{L} \rho\ddot{W}\dot{W}^* dxdt \leqslant \int_{-L}^{L} \rho\dot{W}_\circ\dot{W}^*_\circ dx \tag{2.10}$$

Ở đây $\qquad \dot{W}_\circ = \dot{W}(x, 0)\,;\ \dot{W}^*_\circ = \dot{W}^*(x, 0)$

Nếu các trường động cho phép được chọn thỏa mãn bất đẳng thức

$$-\int_0^{T^*}\int_{-L}^{L} \rho\ddot{\overline{W}}\dot{W}^* dxdt \geqslant \int_{-L}^{L} \rho\dot{W}_\circ\dot{W}^*_\circ dx \tag{2.11}$$

Khi so sánh (2.10) và (2.11) và trên cơ sở (2.8) và (2.9) suy ra công nội lực gây ra bởi trường vận tốc động cho phép $\dot{W}^*$ và dịch chuyển động cho phép sẽ lớn hơn công nội lực thực trên trường vận tốc động cho phép $\dot{W}^*$.

Kết quả so sánh cho ta đánh giá sau:

$$\sum_i \int_0^{T^*} K\overline{M}^*[\dot{W}^*]_{x_i}\,dt + \int_0^{T^*}\int_{-L}^{L} K\overline{M}^*\dot{W}^{*''}\,dxdt +$$

$$+ \int_0^{T^*}\int_{-L}^{L} \overline{N}^*\overline{W}'\dot{W}^{*'}\,dxdt \geqslant \int_0^{T^*}\int_{-L}^{L} (P - \rho\ddot{W})\dot{W}^*dxdt \qquad (2.12)$$

Tích phân từng phần số hạng cuối cùng vế phải (2.12) theo thời gian và thực hiện các phép chuyển vế cần thiết ta được:

$$-\int_{-L}^{L} \rho W(T^*)\ddot{W}^*(T^*)dx + \int_{-L}^{L} \rho W\dddot{W}^*dxdt \geqslant \int_0^{T^*}\int_{-L}^{L} P\dot{W}^*dxdt + \int_{-L}^{L} \rho\dot{W}_o\dot{W}_q^*dx -$$

$$-\sum_i \int_0^{T^*} \overline{M}^*[\dot{W}^{*'}]_{x_i}Kdt - \int_0^{T^*}\int_{-L}^{L} K\overline{M}^*\dot{W}^{*''}dxdt - \int_0^{T^*}\int_{-L}^{L} \overline{N}^*\overline{W}'\dot{W}^{*'}dxdt \qquad (2.13)$$

Việc chọn $\dot{W}^*$ sao cho $\ddot{W}(T^*) \leqslant 0$, $\dddot{W}^* \geqslant 0$, $\forall x, t \in [-L; L], [0, T^*]$ sẽ cho phép rút ra đánh giá:

$$\delta \geqslant \Big\{ \int_0^{T^*}\int_{-L}^{L} P\dot{W}^*dxdt - \sum_i \int_0^{T^*} K\overline{M}^*[\dot{W}^{*'}]_{x_i}dt - \int_0^{T^*}\int_{-L}^{L} \overline{M}^*K\dot{W}^{*''}dxdt +$$

$$+ \int_{-L}^{L} \rho\dot{W}_o\dot{W}_o^*dx - \int_0^{T^*}\int_{-L}^{L} \overline{N}^*\overline{W}'\dot{W}^{*'}dxdt \Big\} \Big/ \Big\{ -\int_{-L}^{L} \rho\ddot{W}^*(o)dx \Big\} \qquad (2.14)$$

Ở đây $\delta = \max W(x, t)$; $\forall x, t \in [-L, L], [0, \infty)$. Tham số T^* sẽ được xác định sao cho vế phải của (2.14) đạt giá trị cực đại.

Biểu thức (2.14) cho ta đánh giá dưới dịch chuyển dư theo hướng trục Oy của dầm cứng dẻo chịu tác dụng tải trọng động trong dạng tổng quát $P(x, t)$, trong đó còn chứa 2 tham số K, T^* mà việc xác định chúng phụ thuộc vào từng bài toán cụ thể, sẽ được minh họa trong các ví dụ ở phần II.

Chúng ta hãy xét một lớp riêng các trường động cho phép sau:

$$\dot{W}^* = q(L, T^*)f_3(\tau)(1 - |\tilde{x}|); \quad \overline{W} = Q(L, T^*)f_1(\tau)f_2(x) \qquad (2.15)$$

Ở đây: $\tilde{x} = x/L$, $\tau = t/T^*$ và ký hiệu $(\overset{\circ}{\ }) = \partial(\ )/\partial\tau$, $(^\nabla) = \partial(\ )/\partial\tilde{x}$; $q(L, T^*) > 0$, $Q(L, T^*) > 0$ khi đó $\forall \tilde{x}, \tau \in [0, 1]$.

Để thỏa mãn các điều kiện về chọn các trường động cho phép đã nêu ở trên các hàm f_i cần thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$f_1 > 0,\ f_2 > 0,\ \overset{\circ}{f}_3 < 0,\ \overset{\circ\circ}{f}_3 \geqslant 0,\ f_3 > 0,\ f_1(0) = 0,\ f_2(1) = 0 \qquad (2.16)$$

Nếu ta chọn f_1 và f_3 sao cho $-\int_0^1 \overset{\circ\circ}{f_1} f_3 d\tau$ ⊕ thì khi thế (2.16) vào (2.11) chúng ta nhận được biểu thức để xác định Q

$$Q(L, T^*) = T^* \dot{W}_o f_3(o) \Big/ \left\{ -\int_0^1 \overset{\circ\circ}{f_1} f_3 d\tau \cdot \int_0^1 f_2(1 - |\tilde{x}|) d\tilde{x} \right\} \qquad (2.17)$$

Từ (2.15) sẽ xác định trường vận tốc biến dạng cho phép theo (1.3) và qua quy luật chảy dẻo sẽ chỉ ra rằng: Trường ứng xuất xác định qua trường vận tốc biến dạng mô tả một dầm làm việc do sự hình thành 2 khớp dẻo tại $\tilde{x} = 0$, $\tilde{x} = \pm 1$ ở đó mômen đạt tới giới hạn M_o, tại các điểm còn lại dầm chịu kéo dọc trục thuần túy với lực kéo đạt tới giới hạn N_o.

Với các chú ý trên đây khi thế (2.17), (2.15) vào (2.14), chúng ta sẽ thu được đánh giá

$$\delta \geqslant \frac{1}{-\dot{f}_3(o)} \left\{ \frac{T^{*2}}{\rho} \int_0^1 \int_{-1}^1 f_3 P[1 - |\tilde{x}|] d\tilde{x} d\tau - \frac{\overline{B}KM_oT^{*2}}{\rho L^2} \int_0^1 f_3 d\tau + \right.$$

$$\left. + T^* \dot{W}^o - \frac{N_o \dot{W}_o T^{*3}}{\rho L^2} \cdot \frac{f_3(o) \int_0^1 f_1 f_3 d\tau}{\int_0^1 \overset{\circ\circ}{f_1} f_3 d\tau} \cdot \frac{f_3(o) \int_{-1}^1 |\overset{\nabla}{f_2}| d\tilde{x}}{\int_{-1}^1 f_2[1 - |\tilde{x}|] d\tilde{x}} \right\} \qquad (2.18)$$

Nếu đặt:

$$C = \int_0^1 f_3 d\tau \;; \quad A = \frac{f_3(o) \int_0^1 f_1 f_3 d\tau}{\int_0^1 \overset{\circ\circ}{f_1} f_3 d\tau} \cdot \frac{f_3(o) \int_{-1}^1 |\overset{\nabla}{f_2}| d\tilde{x}}{\int_{-1}^1 f_2[1 - |\tilde{x}|] d\tilde{x}}$$

$$\overline{B} = \begin{cases} 2 \text{ khi dầm khớp bản lề trên biên.} \\ 4 \text{ khi dầm ngàm trên biên.} \end{cases}$$

Xét trường hợp dầm chịu xung lực vận tốc $\dot{W}_o$ phân bố đều trên toàn bề mặt; khi đó $P(x; t) = 0$, từ (2.18) chúng ta sẽ có kết quả sau đây:

$$\delta \geqslant \frac{1}{-\dot{f}_3(o)} \left\{ \dot{W}_o T^* - \frac{\overline{B}KCM_o}{\rho L^2} T^{*2} - \frac{N_o \dot{W}_o A}{\rho L^2} T^{*3} \right\} \qquad (2.19)$$

Với các điều kiện chọn f_i như nêu ở trên, dễ dàng chúng ta thấy rằng các hệ số của T^* trong (2.19) sẽ dương:

$$\frac{\overline{B}KCM_o}{\rho L^2} > 0 \;; \quad \frac{N_o \dot{W}_o A}{\rho L^2} > 0$$

Giá trị $T^* > 0$ làm cho vế phải (2.19) đạt giá trị cực đại tuyệt đối trong khoảng $T^* \in [0, \infty)$ được xác định từ phương trình:

$$-\dot{W}_o + (2\overline{B}KCM_oT^* + 3N_o\dot{W}_oAT^{*2})/\rho L^2 = 0$$

Sẽ cho :

$$T^* = \frac{\overline{B}KCH}{6A\dot{W}_o}\left[-1+\sqrt{1+\frac{12A\lambda}{\overline{B}^2K^2C^2}}\right],\ \lambda = \frac{\rho L^2\dot{W}_o}{2M_oH}. \qquad (2.20)$$

Thay (2.20) vào (2.19) chúng ta nhận được đánh giá :

$$\delta \geqslant \frac{1}{-f_3^o(o)}\cdot\frac{\overline{B}CKH}{6A}\left\{D - \frac{\overline{B}^2K^2C^2}{12A\lambda}D^2 - \frac{\overline{B}^2K^2C^2}{36A\lambda}D^3\right\} \qquad (2.21)$$

trong đó

$$D = \left[-1+\sqrt{1+\frac{12A\lambda}{\overline{B}^2K^2C^2}}\right]$$

Biểu thức đánh giá (2.21) chứa tham số K cần xác định, tất nhiên là $K = K(\overline{W})$. IK được xác định sao cho trạng thái ứng suất (2.3) bảo đảm điều kiện (2.4). Trong (2.3) các hàm F(t), R(t), H(t) có thể xác định một cách tùy ý. Trong trường hợp tổng quát việc xác định tham số K gặp khó khăn, song trong nhiều trường hợp riêng khi chọn thích hợp các hàm tùy ý F(t), R(t), H(t) việc xác định K khá dễ dàng. Chi tiết về vấn đề này sẽ được trình bày trong phần II.

§3. KẾT LUẬN

Phương pháp trình bày trong [1] được sử dụng ở đây để tính toán đánh giá dưới dịch chuyển của dầm cứng dẻo chịu tải trọng động (2.14). Trong trường hợp dầm chịu tải trọng xung lực vận tốc phân bố đều, khi chọn W^* có hàm dạng $(1-|x|)$ biểu thức đánh giá dưới dịch chuyển dư đã được xác định tổng quát chung cho dầm ngàm và dầm khớp bản lề (2.21). Trong (2.21) chứa tham số K điều chỉnh để cho trường ứng suất $\overline{M}^o$, $\overline{N}$ cân bằng động với dịch chuyển cho phép $\overline{W}$ ở khắp nơi không phá vỡ giới hạn chảy dẻo. Các trường ứng suất $\overline{M}^o$, $\overline{N}$ tồn tại vô số qua việc chọn tùy ý các hàm R(t), F(t), H(t) trong (2.3). Trong chúng ta chỉ cần ra một lớp riêng. Điều kiện để trạng thái ứng suất được chọn là cho phép, sẽ xác định giá trị hệ số K.

Địa chỉ:
Phân viện Cơ T. P. HCM.

Nhận ngày 12/10/1987

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. VŨ VĂN THẾ, TRẦN BÁ TỊNH. Về phương pháp đánh giá dịch chuyển của các công trình cứng dẻo chịu tải trọng động mạnh gây ra dịch chuyển lớn. Tạp chí «Cơ học» N°2 1987.

SUMMARY

ON BOUND FOR DISPLACEMENTS OF DYNAMICALLY LOADED RIGID PLASTIC BEAM I.

In Past I of this two part article the bounding technique developed in [1] is applied in order to estimate the permanent transverse deflection of dynamically loaded rigid plastic beams at large displacements. The bounding inequality for maximum deflections of the fully clamped and simple supported beams subjected to uniformly initial velocity W_o is obtained (2.21), when the dynamically admissible fields are chosen in separated variable form (2.15).