

MẤT ỔN ĐỊNH CỦA SÓNG LAN TRUYỀN TRÊN KÊNH NGHIÊNG CÓ ĐÁY BIẾN ĐỔI

PHẠM HÙNG

Trong bài này, sự lan truyền của sóng trên kênh nghiêng, có đáy biến đổi đã được khảo sát. Phương pháp đường đặc trưng đã được sử dụng. Đã đưa ra phương trình đường đặc trưng và hệ thức trên đường đặc trưng. Đối với sóng có biên độ nhỏ, phương pháp Fourier đã được sử dụng. Đã chỉ ra rằng điều kiện ổn định của sóng có thể thu được từ kết quả của phương pháp Fourier và phương pháp đường đặc trưng. Đã chỉ ra ảnh hưởng của biến đổi đáy lên tính ổn định của sóng.

1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

Chuyển động của chất lỏng nhớt, không nén được, trên kênh nghiêng, thiết diện hình chữ nhật, có đáy biến đổi (xem Hình 1) được mô tả bởi hệ phương trình Saint-Venant một chiều và phương trình biến đổi đáy (xem [1], [2]) có dạng:

$$\begin{aligned}h_t + (vh)_x &= 0, \\v_t + vv_x + g(h + \phi)_x \cos \alpha &= g \sin \alpha - C_f \frac{v^2}{h}, \\ \phi_t + q_x &= 0, \quad q = Q(v, h),\end{aligned}\tag{1.1}$$

trong đó h là độ sâu, v vận tốc trung bình theo thiết diện, g gia tốc trọng trường, α góc nghiêng giữa trục Ox và phương nằm ngang, C_f hệ số không thứ nguyên, ϕ mặt đáy, q lưu lượng bùn cát đáy, Q là hàm số đã biết của v, h ký hiệu $(\cdot)_t, (\cdot)_x$ chỉ đạo hàm riêng theo t và x của đại lượng (\cdot)

Ta đưa vào các đại lượng không thứ nguyên:

$$h' = \frac{h}{h_0}, \quad x' = \frac{x}{L_0}, \quad v' = \frac{v}{\sqrt{gH_0}}, \quad q' = \frac{q}{Q_0}, \quad \phi' = \frac{\phi}{H_0}, \quad t' = \frac{t\sqrt{gH_0}}{L_0},$$

trong đó H_0 độ sâu, đặc trưng của dòng chảy, L_0 độ dài đặc trưng theo chiều Ox , $\sqrt{gH_0}$ vận tốc đặc trưng, Q_0 lưu lượng bùn cát đặc trưng.

Hệ (1.1) được đưa về dạng không thứ nguyên (bỏ dấu ') chỉ các đại lượng không thứ nguyên):

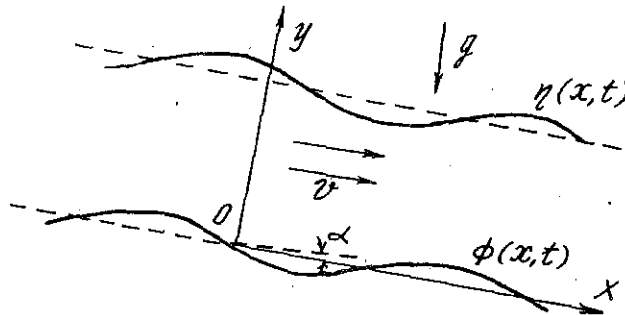
$$\begin{aligned}
 h_t + (vh)_x &= 0, \\
 \chi(v_t + vv_x + (h + \phi)_x \cdot \cos \alpha) &= 1 - \frac{1}{F^2} \cdot \frac{v^2}{h}, \\
 \phi_t + \beta \cdot q_x &= 0, \quad q = Q(v, h),
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

trong đó:

$$\chi = \frac{H_0}{L_0 \cdot \sin \alpha}, \quad \beta = \frac{Q_0}{\sqrt{gH_0} \cdot H_0}, \quad F = \sqrt{\frac{\sin \alpha}{C_f}}.$$

Chúng ta sẽ xét trường hợp, $F = 0(1)$, $\chi = 0(1)$

Vì giá trị cụ thể của χ không đóng vai trò quan trọng, không mất tính tổng quát ta đặt: $\chi = 1$



Hình 1. Sơ đồ dòng chảy

2. PHƯƠNG PHÁP ĐƯỜNG ĐẶC TRUNG

Hệ phương trình (1.2) được khảo sát bằng phương pháp đường đặc trưng (xem [3], [4]). Các vận tốc đặc trưng thỏa mãn phương trình:

$$\begin{vmatrix} v - \lambda & h & 0 \\ \cos \alpha & v - \lambda & \cos \alpha \\ \beta q_h & \beta q_v & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2.1}$$

Phương trình (2.1) tương đương với phương trình bậc 3 đối với λ :

$$\lambda^3 - 2v \cdot \lambda^2 + \lambda(v^2 - \beta \cos \alpha q_v - \cos \alpha h) + \beta \cos \alpha (q_v \cdot v - q_h \cdot h) = 0. \tag{2.2}$$

Điều kiện để cho (2.2) có ba nghiệm thực khác nhau là (xem [5] trang 45)

$$\begin{aligned}
 27\beta^2 \cos^2 \alpha (-q_h \cdot h + q_v \cdot v)^2 - 4 \cos \alpha (h + \beta q_v) (v^2 - h \cos \alpha - \beta q_v \cdot \cos \alpha)^2 + \\
 + 4\beta v \cdot \cos \alpha (h q_h - v q_v) \cdot (-v^2 + 9 \cos \alpha h + 9\beta \cos \alpha q_v) < 0,
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

(2.3) thỏa mãn nếu $v^2 - h \cos \alpha = 0(1)$, $\beta \ll 1$, hoặc $q_v > 0$, $\beta \gg 1$. Giả sử $\lambda^{(n)}$, $n = 1, 2, 3$ là ba nghiệm thực của (2.2), khi đó các phương trình đường đặc trưng có dạng:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda^{(n)}, \quad n = 1, 2, 3.$$

Ứng với các đường đặc trưng, có các hệ thức trên đường đặc trưng như sau:

$$-\left\{ \frac{\lambda^{(n)} \cdot (v - \lambda^{(n)})}{\cos \alpha h} + \frac{\beta q_v}{h} \right\} \frac{dh}{dt} + \left\{ \frac{\lambda^{(n)}}{\cos \alpha} \right\} \frac{dv}{dt} + \frac{d\phi}{dt} = \frac{\lambda^{(n)}}{\cos \alpha} \left\{ 1 - \frac{v^2}{F^2 h} \right\} \quad (2.4)$$

Giả thiết $\beta \ll 1$, nghiệm của (2.2) được tìm dưới dạng chuỗi tiệm cận theo β như sau:

$$\lambda = \lambda_0 + \beta \lambda_1 + \beta^2 \lambda_2 + \dots$$

Thế vào (2.2), xấp xỉ bậc 0 theo β cho nghiệm:

$$\lambda_0^{(1,2)} = v \pm \sqrt{h \cdot \cos \alpha}, \quad \lambda_0^{(3)} = 0.$$

Xấp xỉ bậc một theo β cho nghiệm:

$$\lambda_1^{(n)} = \frac{-q_v \cdot \cos \alpha v + q_h \cdot \cos \alpha h + \lambda_0^{(n)} \cos \alpha q_v}{3\lambda_0^{(n)2} - 4\lambda_0^{(n)} v + (v^2 - \cos \alpha h)}, \quad n = 1, 2, 3$$

Ứng với $n = 3$, ta có

$$\lambda_1^{(3)} = -\frac{\cos \alpha (q_v \cdot v - q_h \cdot h)}{v^2 - \cos \alpha h}, \quad (2.5)$$

như vậy, nếu $q_v \cdot v - q_h \cdot h > 0$ đường đặc trưng ứng với chuyển động của bùn cát sẽ hướng sang phải nếu $v^2 < \cos \alpha \cdot h$ và hướng sang trái nếu $v^2 > \cos \alpha \cdot h$.

Trong [1] Cunge cũng thu được kết quả trên khi ông xét chuyển động á dừng, coi các đặc trưng thủy lực như độ sâu, vận tốc không phụ thuộc thời gian, trong khi đáy biến đổi theo thời gian.

3. PHƯƠNG PHÁP FOURIER

Hệ (1.2) có nghiệm dừng:

$$v_0 = F, \quad h_0 = 1, \quad \phi_0 = 0. \quad (3.1)$$

Ta xét kích động nhỏ bên cạnh trạng thái dừng (3.1):

$$\begin{aligned} v &= v_0 + \varepsilon v_1 + \dots \\ h &= h_0 + \varepsilon h_1 + \dots \\ \phi &= \varepsilon \phi_1 + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Trong đó ε là tham số không thứ nguyên đặc trưng cho biên độ của các kích động. Giả thiết $|\varepsilon| \ll 1$ ta xét 2 trường hợp sau:

a)

$$|\beta| \leq |\varepsilon| \ll 1$$

Thế (3.2) vào (1.2), chỉ giữ lại những số hạng bậc nhất theo ε , ta thu được hệ phương trình:

$$\begin{aligned} h_{1t} + F h_{1x} + v_{1x} &= 0, \\ v_{1t} + F v_{1x} + h_{1x} \cdot \cos \alpha + \phi_{1x} \cdot \cos \alpha + \frac{2v_1}{F} - h_1 &= 0, \\ \phi_{1t} &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Phương trình cuối cho nghiệm $\phi_1 = G(x)$, trong đó $G(x)$ là hàm bất kỳ của x , được xác định từ điều kiện ban đầu.

Hệ (3.3) được đưa về 2 phương trình không đồng nhất, nghiệm riêng của hệ có dạng:

$$h_1^{(s)} = e^{-\frac{3x}{-F^2 + \cos \alpha}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{3\hat{x}}{-F^2 + \cos \alpha}} \left\{ \frac{-G'(\hat{x}) \cos \alpha}{-F^2 + \cos \alpha} \right\} d\hat{x}. \quad (3.4)$$

Nghiệm chung của hệ hai phương trình đồng nhất được tìm bằng phương pháp Fourier (xem [3])

$$h_1^{(g)} = AH \cdot e^{i(kx - \omega t)}, \quad v_1^{(g)} = AV \cdot e^{i(kx - \omega t)}, \quad (3.5)$$

(k là số sóng, ω là tần số, AH, AV là biên độ cần tìm).

Thế (3.5) vào (3.3) (bỏ qua các số hạng tính đến biến dạng đáy), ta thu được hệ hai phương trình đại số đối với AH, AV điều kiện để hệ có nghiệm không tầm thường là ω thỏa mãn quan hệ tán xạ:

$$\omega(k) = KF \pm \sqrt{\frac{r_k - X_k}{2}} + i \left(-\frac{1}{F} \pm \sqrt{\frac{r_k + X_k}{2}} \right), \quad (3.6)$$

trong đó:

$$X_k = \frac{1}{F^2} - k^2 \cos \alpha, \quad r_k = \sqrt{X_k^2 + k^2},$$

vì $h_1 = h_1^{(s)} + h_1^{(g)}$, $v_1 = v_1^{(s)} + v_1^{(g)}$ điều kiện để nghiệm h_1, v_1 ổn định là

$$-\frac{1}{F} + \sqrt{\frac{r_k + X_k}{2}} \leq 0. \quad (3.7)$$

Điều này tương đương với $\operatorname{tg} \alpha \leq 4C_f$.

Kết quả (3.7) đã được thu nhận đối với kênh có đáy cứng, phẳng (xem [3]). Nếu áp dụng phương pháp đường đặc trưng đối với hệ (3.3), ta có 3 đường đặc trưng:

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = F + \sqrt{\cos \alpha}, \quad \frac{dx}{dt} = F - \sqrt{\cos \alpha}, \quad (3.8)$$

Mặt khác, từ (3.6), vận tốc pha của các kính động có dạng

$$\frac{\omega(k)}{K} = F \pm \frac{1}{K} \sqrt{\frac{r_k - X_k}{2}}$$

Điều này không mâu thuẫn với (3.8) nếu:

$$\frac{1}{K} \sqrt{\frac{r_k - X_k}{2}} \geq \sqrt{\cos \alpha}, \quad (3.9)$$

(3.9) tương đương với: $\operatorname{tg} \alpha \leq 4C_f$.

Có thể kiểm tra được rằng khi $\operatorname{tg} \alpha = 4C_f$, nghiệm của hệ (3.3) có dạng:

$$h_1 = h_1^{(s)} + f_1 \left(x - \frac{3F}{2} t \right) + g_1 \left(x - \frac{F}{2} t \right) e^{-\frac{2}{F} t},$$

$$v_1 = v_1^{(s)} + \frac{F}{2} f_1 \left(x - \frac{3F}{2} t \right) + \left\{ -\frac{F}{2} g_1 \left(x - \frac{F}{2} t \right) + \frac{2}{F} \int_{-\infty}^{x - \frac{F}{2} t} g_1(\hat{x}) d(\hat{x}) \right\} \cdot e^{-\frac{2}{F} t}, \quad (3.10)$$

f_1, g_1 là hai hàm số bất kỳ, được xác định từ điều kiện ban đầu, $h_1^{(s)}, v_1^{(s)}$ biểu diễn qua $G(x)$ theo (3.4)

b) $|\varepsilon| \ll |\beta| \ll 1$

Hệ (3.3) sẽ có dạng như sau:

$$\begin{aligned} h_{1t} + Fh_{1x} + v_{1x} &= 0, \\ v_{1t} + Fv_{1x} + h_{1x} \cdot \cos \alpha + \phi_{1x} \cdot \cos \alpha + \frac{2v_1}{F} - h_1 &= 0, \\ \phi_{1t} + \beta\delta_1 \cdot h_{1x} + \beta\delta_2 \cdot v_{1x} &= 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

trong đó

$$\delta_1 \equiv q_h|_{h=1, v=F, \phi=0}, \quad \delta_2 \equiv q_v|_{h=1, v=F, \phi=0}.$$

Áp dụng phương pháp Fourier đối với hệ (3.11), ta tìm nghiệm dưới dạng:

$$h_1 = AH \cdot e^{i(kx - \omega t)}, \quad v_1 = AV \cdot e^{i(kx - \omega t)}, \quad \phi_1 = AF \cdot e^{i(kx - \omega t)},$$

thế vào (3.11) ta thu được hệ 3 phương trình đại số đối với AH, AV, AF điều kiện để hệ có nghiệm không tầm thường là ω phải thỏa mãn phương trình:

$$\begin{aligned} i\omega^3 - \omega^2 \cdot \left\{ 2ikF + \frac{2}{F} \right\} + \omega \cdot \left\{ 3k + i(k^2 F^2 - \cos \alpha k^2 (\beta\delta_2 + 1)) \right\} + \\ + \left\{ i \cos \alpha k^3 \beta \cdot (\delta_2 F - \delta_1) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

nghiệm của (3.12) được tìm dưới dạng chuỗi tiệm cận: $\omega = \omega_0 + \beta\omega_1 + \beta^2\omega_2 + \dots$

Xấp xỉ bậc không cho 3 nghiệm $\omega_0^{(1,2)}$ có dạng (3.6), $\omega_0^{(3)} = 0$

xấp xỉ bậc một theo β có dạng:

$$\omega_1^{(n)} = \frac{ik^2 \cos \alpha \omega_0^{(n)} \cdot \delta_2 - ik^3 \cos \alpha (\delta_2 F - \delta_1)}{3i\omega_0^{2(n)} + 3k + ik^2(F^2 - \cos \alpha) - 4\omega_0^{(n)} \cdot (ikF + \frac{1}{F})}, \quad (3.13)$$

Ứng với $\omega_0^{(3)} = 0$

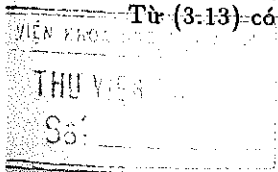
$$\begin{aligned} \text{Re}\omega_1^{(3)} &= \frac{-k^5 \cdot (F^2 - \cos \alpha) (\delta_2 F - \delta_1) \cos \alpha}{9k^2 + k^4 (F^2 - \cos \alpha)^2}, \\ \text{Im}\omega_1^{(3)} &= \frac{-3k^4 (\delta_2 F - \delta_1) \cos \alpha}{9k^2 + k^4 (F^2 - \cos \alpha)^2}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

Từ (3.14) ta thấy sóng cát là sóng tán xạ (vận tốc pha phụ thuộc bước sóng). Nếu $\delta_2 F - \delta_1 > 0$ sóng cát luôn ổn định tuyến tính. Ngoài ra, nếu $F^2 - \cos \alpha > 0$, $\delta_2 F - \delta_1 > 0$ sóng cát chuyển động sang trái, nếu $F^2 - \cos \alpha < 0$, $\delta_2 F - \delta_1 > 0$ sóng cát chuyển động sang phải. Điều này hoàn toàn phù hợp với kết luận (2.5) của phương pháp đường đặc trưng.

Đáng chú ý là khi $F^e = \cos \alpha$, $\text{Re}\omega_1^{(3)} = 0$, $\text{Im}\omega_1^{(3)} < 0$, nếu $\delta_2 F - \delta_1 > 0$ sóng cát sẽ đứng yên và tắt theo thời gian, tạo thành đáy phẳng. Kết luận này phù hợp một cách định tính với thực nghiệm.

Để xét ảnh hưởng của bùn cát lên tính ổn định của sóng từ (3.6) ta thấy khi $t\alpha = 4C_f$, $\text{Im}\omega_0^{(1)} < 0$, $\text{Im}\omega_0^{(2)} = 0$.

Từ (3.13) có thể kiểm tra được rằng



$$\operatorname{Re}\omega_1^{(2)} = \frac{k^3 F^4 \left(\frac{\delta_2 F}{2} + \delta_1 \right)}{24 \left(1 + \frac{F^4 K^2}{4} \right)}, \quad \operatorname{Im}\omega_1^{(2)} = -\frac{k^2 F^2 \left(\frac{\delta_2 F}{2} + \delta_1 \right)}{24 \left(1 + \frac{F^4 K^2}{4} \right)},$$

Như vậy, nếu $\frac{\delta_2 F}{2} + \delta_1 > 0$ bùn cát sẽ làm tăng tính ổn định của sóng bề mặt, chuyển động sang phải với vận tốc $\frac{3F}{2}$ ngược lại nếu $\frac{\delta_2 F}{2} + \delta_1 < 0$ bùn cát sẽ làm giảm tính ổn định. Ngoài ra, nếu $\frac{\delta_2 F}{2} + \delta_1 > 0$ bùn cát làm tăng vận tốc truyền sóng, nếu $\frac{\delta_2 F}{2} + \delta_1 < 0$ bùn cát làm giảm vận tốc truyền sóng.

4. KẾT LUẬN

Phương pháp đường đặc trưng và phương pháp Fourier đã được áp dụng trong nghiên cứu tính ổn định của sóng lan truyền trên kênh nghiêng có đáy biến đổi. Bằng phương pháp tiệm cận đã thu được kết quả trùng với kết quả của Cunge khi ông nghiên cứu chuyển động á dừng. Điều kiện ổn định đã được thu nhận từ kết quả của hai phương pháp trên. Đã chỉ ra ảnh hưởng của bùn cát lên tính ổn định của sóng bề mặt khi góc nghiêng bằng góc nghiêng tới hạn.

Tác giả chân thành bày tỏ sự cảm ơn G.S.T.S. Nguyễn Văn Điệp đã quan tâm ủng hộ và đóng góp nhiều nhận xét có giá trị khoa học cho công trình này.

Địa chỉ:
Viện Cơ Viện KHVN

Nhận ngày 12/10/1989

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. J. A. Cunge, N. Perdreau. Mobile bed fluvial mathematical models. La Houille Blanche, No. 7, 1973.
2. D. J. Needham. The development of bed form disturbance in an alluvial river or channel. Journal of applied mathematics and physics. (ZAMP) Vol. 39, January, 1988.
3. Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны. Москва 1977.
4. Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. Системы квазилинейных уравнений. Москва 1978.
5. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике. Москва 1974.

SUMMARY

THE UNSTABILITY OF A FLOW IN AN INCLINED ALLUVIAL CHANNEL

The instability of a flow in an inclined alluvial channel is investigated by the characteristic and the Fourier methods. It is shown that the bedform development could influence significantly on the stability of the water surface.