Tạp chí CƠ HỌC, tập XII, 1990, số 1 (1 — 6)

DAO ĐỘNG THỨ ĐIỀU HÒA TRONG HỆ CẤP MỘT CÓ CHẬM

NGUYỄN ĐÔNG ANH, NGUYỄN TIẾN KHIÊM

Tiếp tục những nghiên cứu hệ cấp 1 có chậm, trong bài này đề cập vấn đề dao động thứ điều hòa. Bằng phương pháp tiệm cận Krưlôv-Bôgôliubôv-Mitrôpôlski ở đây xây dựng thuật toán tìm các dao động thứ điều hòa trong hệ:

$$\dot{X}(t) + \alpha X(t - \Delta) = P \sin \nu t + Q \cos \nu t + \varepsilon f(X, \dot{X}), \tag{0.1}$$

trong đó

$$\sin \alpha\Delta = 1, \qquad \cos \alpha\Delta = 0. \tag{0.2}$$

Các đẳng thức (0.2) chứng tỏ hệ (0.1) khi $\varepsilon = P = Q = 0$ có dao động tuần hoàn tần số α. Trong công trình trước đã xét bức tranh dao động của hệ trên trong vùng cộng hưởng chính ($\nu \sim \alpha$) còn ở đây nghiên cứu trong miền xa cộng hưởng chính - miền siêu cộng hưởng ($\nu \sim n\alpha, \quad n \geq 2$).

Giả thiết:

$$\alpha = \frac{\nu}{n} + \varepsilon\sigma$$

khi đó hệ (0.1) có thể viết thành

$$\dot{X}(t) + \frac{\nu}{n} X(t - \Delta) = P \sin \nu t + Q \cos \nu t + \varepsilon [f(X, \dot{X}) - \sigma X_\Delta]. \tag{0.3}$$

1. XÂY DỰNG NGHIỆM TIỆM CẬN

Ta tìm nghiệm phương trình (0.3) dưới dạng:

$$X = A \cos \nu t + B \sin \nu t + a \cos \phi + \varepsilon u_1(a, \phi) + \dots \tag{1.1}$$

trong đó

$$\phi = \frac{\nu}{n} t + \theta; \quad \dot{a} = \varepsilon A_1(a, \theta) + \dots; \quad \dot{\theta} = \varepsilon B_1(a, \theta) + \dots \tag{1.2}$$

A, B, A_1, B_1, u_1 là các hàm phải tìm. Dao động

$$X_0 = a\cos\phi, \qquad \phi = \frac{\nu}{n}t + \theta, \tag{1.3}$$

trong đó a, θ thỏa mãn (1.2) gọi là dao động thứ điều hòa cấp n.

Trước hết, với điều kiện (0.2) ta có:

$$\begin{aligned} \sin\nu\Delta &= \sin n(\alpha\Delta - \varepsilon\sigma\Delta) = \sin n\alpha\Delta - \varepsilon\sigma n\Delta\cos n\alpha\Delta + \varepsilon^2\ldots, \\ \cos\nu\Delta &= \cos n(\alpha\Delta - \varepsilon\sigma\Delta) = \cos n\alpha\Delta + \varepsilon\sigma n\Delta\sin n\alpha\Delta + \varepsilon^2\ldots. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Vi phân (1.1) ta được:

$$\dot{X} = -\nu A\sin\nu t + \nu B\cos\nu t - \frac{\nu}{n}a\sin\phi + \varepsilon\{A_1\cos\phi - aB_1\sin\phi + \frac{\nu}{n}\frac{\partial u_1}{\partial\phi}\} + \ldots \tag{1.5}$$

và tương tự như trong các bài trước:

$$\begin{aligned} X_\Delta = X(t-\Delta) &= \overline{A}\cos\nu t + \overline{B}\sin\nu t + a\sin\phi + \varepsilon\{-\Delta A_1\sin\phi - \Delta a(B_1 - \sigma)\cos\phi + \\ &+ u_1 + n\Delta\sigma B\cos n\alpha\Delta\cos\nu t - n\Delta\sigma A\sin n\alpha\Delta\sin\nu t\} + \ldots \\ \overline{A} &= A\cos n\alpha\Delta - B\sin n\alpha\Delta; \qquad \overline{B} = A\sin n\alpha\Delta + B\cos n\alpha\Delta. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Thay (1.1), (1.5) và (1.6) vào (0.3), khai triển vế phải theo ε, so sánh các hệ số của ε^0, ε^1 ta sẽ có:

$$\begin{aligned} \left(-\nu + \frac{\nu}{n}\sin n\alpha\Delta\right)A + \frac{\nu}{n}\cos n\alpha\Delta\cdot B &= P, \\ \frac{\nu}{n}\cos n\alpha\Delta\cdot A + \left(\nu - \frac{\nu}{n}\sin n\alpha\Delta\right)B &= Q, \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} \left[A_1 - \frac{\nu\Delta}{n}a(B_1 - \sigma)\right]\cos\phi - \left[\frac{\nu\Delta}{n}A_1 + a(B_1-\sigma)\right]\sin\phi + \frac{\nu}{n}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\phi} + u_1\right) &= \\ = \sigma[C_n\cos n\phi + S_n\sin n\phi] + f_0(\nu t, a, \phi), \end{aligned} \tag{1.8}$$

với:

$$\begin{aligned} C_n &= [(n\Delta - 1)\sin n\alpha\Delta\cdot A - \cos n\alpha\Delta\cdot B]\sin n\theta + \\ &+ [\cos n\alpha\Delta\cdot A + (\Delta n - 1)\sin n\alpha\Delta\cdot B]\cos n\theta; \\ S_n &= [(1 - n\Delta)\sin n\alpha\Delta\cdot A + \cos n\alpha\Delta\cdot B]\cos n\theta + \\ &+ [(A + n\Delta B)\cos n\alpha\Delta - B\sin n\alpha\Delta]\sin n\theta; \\ f_0(\nu t, a, \phi) &= f[A\cos n(\phi-\theta) + B\sin n(\phi-\theta) + a\cos\phi - \\ &- \nu A\sin n(\phi-\theta) + \nu B\cos n(\phi-\theta) - \frac{\nu}{n}a\sin\phi]. \end{aligned}$$

Nếu khai triển hàm ra chuỗi Fourie:

$$f_0 = f_c\cos\phi + f_s\sin\phi + h_0 + \sum_{m=2}(h_m\cos m\phi + g_m\sin m\phi),$$

trong đó

$$f_c = 2\langle f_0 \cos\phi\rangle; \qquad f_s = 2\langle f_0 \sin\phi\rangle;$$

$$h_m = 2\langle f_0 \cos m\phi\rangle; \quad g_m = 2\langle f_0 \sin m\phi\rangle; \quad \langle f\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f d\phi.$$

phương trình (1.8) cho ta hệ:

$$A_1 - \frac{\nu\Delta}{n} a(B_1 - \sigma) = f_c; \qquad \frac{\nu\Delta}{n} A_1 + a(B_1 - \sigma) = f_s, \tag{1.9}$$

$$\frac{\nu}{n}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\phi} + u_1\right) = \sigma[C_n \cos n\phi + S_n \sin n\phi] + \sum_{m\neq 1}(h_m \cos m\phi + g_m \sin m\phi). \tag{1.10}$$

Như vậy ta có hệ (1.7) để tìm A, B, (1.9) - A_1, B_1, còn (1.10) - u_1.
Thật vậy, hệ (1.7) cho nghiệm:

$$A = \frac{n}{\nu}\cdot\frac{P(\sin n\alpha\Delta - n) + Q\cos n\alpha\Delta}{1 + n^2 - 2n\sin n\alpha\Delta}$$
$$B = \frac{n}{\nu}\cdot\frac{P\cos n\alpha\Delta - Q(\sin n\alpha\Delta - n)}{1 + n^2 - 2n\sin n\alpha\Delta}$$

và từ đó:

$$A^2 + B^2 = M^2 = \frac{n^2(P^2 + Q^2)}{\nu^2(1 + n^2 - 2n\sin n\alpha\Delta)}, \tag{1.11}$$

(1.9) cho ta:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(1 + \frac{\nu^2\Delta^2}{n^2}\right)^{-1}\left[f_c - \frac{\nu\Delta}{n} f_s\right], \\ B_1 &= \sigma - \left[a\left(1 + \frac{\nu^2\Delta^2}{n^2}\right)\right]^{-1}\left[\frac{\nu\Delta}{n} f_c + f_s\right]. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Nếu tìm u_1 ở dạng

$$u_1 = V_0 + \sum_{m=2}(V_m \cos m\phi + W_m \sin m\phi), \tag{1.13}$$

thì V_0, V_m, W_m sẽ thỏa mãn hệ:

$$\begin{aligned} V_m + mW_m &= \frac{n}{\nu} h_m; \quad -mV_m + W_m = \frac{n}{\nu} g_m, \quad m \neq 1, n; \\ V_n + nW_n &= \frac{n}{\nu}(h_n + \sigma C_n); \quad -nV_n + W_n = \frac{n}{\nu}(g_n + \sigma S_n). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Tóm lại, dao động thứ điều hòa cấp n của hệ (0.1) có dạng:

$$X = a\cos\left(\frac{\nu}{n} t + \theta\right), \tag{1.15}$$

trong đó a, θ thỏa mãn

$$\dot{a} = \left(1 + \frac{\nu^2\Delta^2}{n^2}\right)^{-1}\left[f_c - \frac{\nu\Delta}{n} f_s\right],$$
$$\dot{\theta} = \sigma - \left[a\left(1 + \frac{\nu^2\Delta^2}{n^2}\right)\right]^{-1}\left[f_s + \frac{\nu\Delta}{n} f_c\right]. \tag{1.16}$$

Biên độ và pha dừng sẽ tìm được từ hệ phương trình:

$$f_c - \frac{\nu\Delta}{n} f_s = 0,$$
$$a\left(1 + \frac{\nu^2\Delta^2}{n^2}\right)\sigma - f_s - \frac{\nu\Delta}{n} f_c = 0. \tag{1.17}$$

Điều kiện ổn định của nghiệm dừng khác không theo tiêu chuẩn Hurwitz có dạng:

$$\frac{\partial f_c}{\partial a} - \frac{\nu\Delta}{n} \cdot \frac{\partial f_c}{\partial \theta} - \frac{\partial f_s}{\partial \theta} - \frac{\nu\Delta}{n} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial a} < 0, \tag{1.18}$$
$$\frac{\partial f_s}{\partial a} \cdot \frac{\partial f_c}{\partial \theta} - \frac{\partial f_c}{\partial a} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \theta} - \sigma\left(\frac{\partial f_c}{\partial \theta} - \frac{\nu\Delta}{n} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \theta}\right) > 0. \tag{1.19}$$

2. VÍ DỤ

Bây giờ ta xét hệ Duffing:

$$\ddot{X} + \alpha X_\Delta + \mu X + \beta X^3 = P \sin \nu t + Q \cos \nu t; \quad \mu = \varepsilon\mu_0, \quad \beta = \varepsilon\beta_0. \quad (2.1$$

Sau những tính toán cơ bản theo thuật toán trên ta có

$$f_c = -\left\{\mu_0 + \frac{3\beta_0}{4}(a^2 + 2M^2) + \frac{3\beta_0}{4} a(A\cos 3\theta - B\sin 3\theta)\right\}a;$$
$$f_s = -\frac{3\beta_0}{4} a^2(A\sin 3\theta + B\cos 3\theta).$$

ứng với

$$n = 3, \quad A = -\frac{3P}{4\nu}, \quad B = \frac{3Q}{4\nu}, \quad M^2 = \frac{9(P^2 + Q^2)}{16\nu^2} = \frac{9r_0^2}{16\nu^2}. \quad (2.$$

Đưa vào các ký hiệu:

$$H(a) = \mu + \frac{3\beta}{4}(a^2 + 2M^2)$$

hệ (1.16) lúc này có dạng:

$$\dot{a} = -\left(1 + \frac{\nu^2\Delta^2}{9}\right)^{-1}\left\{aH(a) + \frac{3\beta}{4}a^2\left[\left(A - \frac{\nu\Delta}{3}\right)\cos 3\theta - \left(\frac{\nu\Delta}{3}A + B\right)\sin 3\theta\right]\right\},$$
$$\dot{\theta} = \alpha - \frac{\nu}{3} + \left(1 + \frac{\nu^2\Delta^2}{9}\right)^{-1}\left\{\frac{\nu\Delta}{3}H(a) + \frac{3\beta}{4}a\left[\left(\frac{\nu\Delta}{3}A + B\right)\cos 3\theta + \left(A - \frac{\nu\Delta}{3}B\right)\sin 3\theta\right]\right\}. \quad (2$$

Biên độ và pha dừng thỏa mãn:

$$H(a) + \frac{3\beta}{4}a\big[\big(A - \frac{\nu\Delta}{3}B\big)\cos 3\theta - \big(\frac{\nu\Delta}{3}A + B\big)\sin 3\theta\big] = 0$$

$$\big(1 + \frac{\nu^2\Delta^2}{9}\big)\big(\alpha - \frac{\nu}{3}\big) + \frac{\nu\Delta}{3}H(a) + \frac{3\beta}{4}a\big[\big(\frac{\nu\Delta}{3}A + B\big)\cos 3\theta + \big(A - \frac{\nu\Delta}{3}B\big)\sin 3\theta\big] = 0.$$

Khử θ trong hệ cuối ta được phương trình biên độ - tần số:

$$W(a,\nu) = \big(1 + \frac{\nu^2\Delta^2}{9}\big)\big(\alpha - \frac{\nu}{3}\big)^2 + \frac{2\nu\Delta}{3}H(a)\big(\frac{\nu}{3} - \alpha\big) + H^2(a) - \frac{81\beta^2 r_0^4}{256\nu^2}a^2 = 0.$$

Nếu bỏ qua những đại lượng nhỏ bậc ε^3 ta sẽ có:

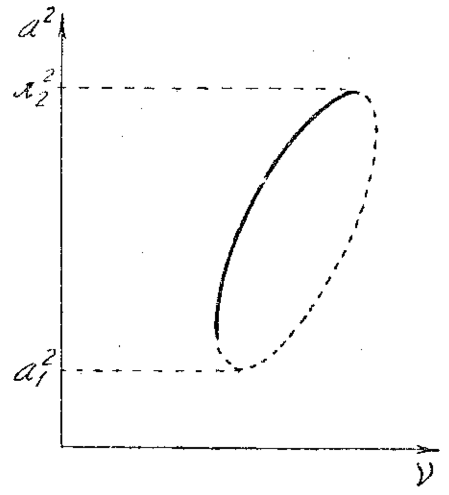
$$(1 + \alpha^2\Delta^2)\big(\frac{\nu}{3} - \alpha\big)^2 - 2\alpha\Delta H(a)\big(\frac{\nu}{3} - \alpha\big) + H^2(a) - \frac{81\beta^2 r_0^4}{256\alpha^2}a^2 = 0. \qquad (2.4)$$

Phương trình (2.4) có nghiệm đối với ν nếu thỏa mãn điều kiện

$$\beta\mu \leq (\alpha^2\Delta^2 - 7)\frac{9\beta^2 r_0^2}{256\alpha^2}. \qquad (2.5)$$

Khi đó

$$\nu = 3\alpha - \frac{3\alpha\Delta}{1 + \alpha^2\Delta^2}H(a) \pm 3\sqrt{\frac{9\beta^2 r_0^2 a^2}{256\alpha^2(1 + \alpha^2\Delta^2)} - \Big(\frac{H(a)}{1 + \alpha^2\Delta^2}\Big)^2}. \qquad (2.6)$$



Hình 1

Phương trình (2.6) có dạng như trong *Hình 1* với hệ tọa độ (a^2, ν) Điều kiện ổn định (1.18) cho ta: $\beta > 0$ tức là lực phi tuyến có đặc trưng cứng. Điều kiện (1.19) cho thấy nó sẽ thỏa mãn trên những điểm ứng với đường liền của đồ thị. Cùng với (2.5) ta thấy dao động thứ điều hòa cấp 3 này tồn tại khi $\mu < 0$ (lực cản âm). Các biên độ lớn nhất và nhỏ nhất tính theo công thức:

$$a_{1.2}^2 = -\frac{4}{3}m + \frac{r_0^2}{32\alpha^2}(\alpha^2\Delta^2 - 3) \pm \frac{\nu_0}{3\alpha}\Big\{(1+\alpha^2\Delta^2)\Big[\frac{9r_0^2}{256\alpha^2}(\alpha^2\Delta^2 - 7) - 3m\Big]\Big\}^{1/2}$$

$$m = \frac{\mu}{\beta} < 0.$$

KẾT LUẬN

Tóm lại từ những kết quả trên ta có thể rút ra những kết luận sau:

1. Dao động thứ điều hòa cấp n của hệ (0.1) có thể tìm ở dạng (1.15) và (1.16).

2. Trong hệ cấp 1 có chậm Duffing dao động thứ điều hòa cấp 3 dạng $X = a\cos\left(\frac{\nu}{3}t + \theta\right)$ tồn tại khi lực phi tuyến có đặc trưng cứng, lực cản âm và thỏa mãn điều kiện:

$$m = \frac{\mu}{\beta} \leq (\alpha^2\Delta^2 - 7)\frac{9r_0^2}{256\alpha^2}.$$

Địa chỉ:
Viện Cơ Viện KHVN

Nhận ngày 16/8/1989

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ю. А. Митропольский, Д. И. Мартынюк. Квазипериодические и периодические колебания систем с запаздыванием. Киев 1979.
2. В. П. Рубаник. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. Наука,М. 1979.
3. Nguyen Van Dao. Non-linear oscillations of high order systems. NCSR SRV, Hanoi, 1979.

SUMMARY

SUBHARMONIC OSCILLATIONS IN FIRST ORDER SYSTEMS WITH DELAY

The subharmonic oscillations with frequency, which is n times smaller than that of exciting periodic force, in first order systems with delay are studied. The averaging equations for the amplitude and phase of the response are constructed. A detailed research of third order subharmonic oscillation in the Duffing system is given.