Tạp chí CƠ HỌC, tập XIII, 1991, số 3 (26 — 32)

VỀ VIỆC GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG VÀ TÍNH LỰC TRONG CƠ CẤU

ĐỖ SANH, PHAN BÙI KHÔI

1. MỞ ĐẦU

Để xác định chuyển động và tính lực trong cơ cấu, người ta thường sử dụng phương trình Lagrange II, phương trình Lagrange với các nhân tử, nguyên lý d'Alembert, nguyên lý d'Alembert Lagrange [1, 2, 3], ... Trong [5] đã sử dụng nguyên lý phù hợp và phép biến đổi biến để xây dựng phương trình chuyển động và phương trình xác định phản lực liên kết.

Trong bài báo này kết hợp sử dụng phương pháp trong [4, 5] để thành lập phương trình và ứng dụng phương pháp số giải các phương trình này.

2. DẶT BÀI TOÁN

Khảo sát cơ cấu với k tọa độ suy rộng đủ $(q_1, \ldots, q_k)$: r tọa đô phụ (có dư) để xác định phản lực liên kết theo phương tương ứng $(\theta_1, \ldots, \theta_r)$ và s tọa độ có dư $(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$. Ký hiệu:

$$\vec{q} = [q_1 \ldots q_k]^T; \quad \vec{\theta} = [\theta_1 \ldots \theta_r]^T; \quad \vec{\gamma} = [\gamma_1 \ldots \gamma_s]^T; \quad \vec{\beta} = [\vec{q} \quad \vec{\theta}]^T; \quad \vec{f} = [f_1 \ldots f_s]^T.$$

ta có các phương trình liên kết:

$$\vec{\theta} = 0; \tag{2.1}$$

$$\vec{f}(\vec{q}, \vec{\theta}, \vec{\gamma}) = 0. \tag{2.2}$$

3. THÀNH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Giả sử từ (2.2) ta rút ra được: $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}(\vec{q}, \vec{\theta})$. Biểu thức động năng của hệ khi đó có dạng:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{\beta}}^T \underline{A}\, \dot{\vec{\beta}}. \tag{3.1}$$

Như trong [4] dạng tổng quát của phương trình chuyển động được viết:

$$\underline{A}\ddot{\vec{\beta}} = \vec{Q} + \vec{\psi} + \vec{R}. \tag{3.2}$$

ở đây $\underline{A} = \underline{A}(\vec{q}, \vec{\theta})$, với các phương trình liên kết (2.1).

$$\dot{\vec{\beta}} = [\dot{q}_1 \ldots \dot{q}_k \quad \dot{\theta}_1 \ldots \dot{\theta}_r]^T = [\dot{\vec{q}} \quad \dot{\vec{\theta}}]^T; \quad \vec{Q} = [Q_{1q} \ldots Q_{kq} \quad Q_{1\theta} \ldots Q_{r\theta}]^T = [\vec{Q}_q \quad \vec{Q}_\theta];$$

Q_{iq}, $Q_{j\theta}$ - lực suy rộng.

$$\vec{R} = [R_{1q} \ldots R_{kq} \; R_{1\theta} \ldots R_{r\theta}]^T = [\vec{R}_q \; \vec{R}_\theta]^T; \quad \vec{\psi} = [\psi_{1q} \ldots \psi_{kq} \; \psi_{1\theta} \ldots \psi_{r\theta}]^T = [\vec{\psi}_q \; \vec{\psi}_\theta]^T.$$

Khi liên kết được thực hiện, (2.1) được thỏa mãn và theo nguyên lý phù hợp ta có $\vec{R}_q = 0$; ψ_{iq}, $\psi_{j\theta}$ được tính:

$$\psi_{iq,\theta} = \sum_{\ell, m=1}^{k} (\ell, m; i) \dot{q}_\ell \dot{q}_m \tag{3.3}$$

với

$$(\ell, m; i) = -\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial a_{\ell i}}{\partial \beta_m} + \frac{\partial a_{mi}}{\partial \beta_\ell} - \frac{\partial a_{\ell m}}{\partial \beta_i}\Big) \tag{3.4}$$

là ký hiệu Christoffel loại 3 chỉ số của ma trận quán tính A. Phương trình (3.2) được viết lại như sau:

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_{qq} & \underline{A}_{q\theta} \\ \underline{A}_{\theta q} & \underline{A}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\vec{q}} \\ \ddot{\vec{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{Q}_q \\ \vec{Q}_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{\psi}_q \\ \psi_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{R}_q \\ \vec{R}_\theta \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$(\underline{A}_{qq})_{k \times k}, \qquad (\underline{A}_{\theta\theta})_{r \times r}$$

Từ (3.5) chúng ta có phương trình chuyển động và phương trình xác định phản lực liên kết trong dạng tách rời nhau [5]:

$$\underline{A}_{qq} \ddot{\vec{q}} = \vec{Q}_q + \vec{\psi}_q, \tag{3.6}$$

$$\vec{R}_\theta = \underline{A}_{\theta q} \big[\underline{A}_{qq}^{-1} (\vec{Q}_q + \vec{\psi}_q)\big] - \vec{Q}_\theta - \vec{\psi}_\theta. \tag{3.7}$$

Trong khi giải hệ (3.6), (3.7) ta chú ý (2.1). Khó khăn khi giải hệ (3.6), (3.7) là tính A, có khi không tính được biểu thức của các phần tử của A, do đó cũng không tính được $\vec{\psi}$. Ta viết biểu thức động năng dưới dạng:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{X}}^T \; \underline{\tilde{A}} \; \dot{\vec{X}}.$$

Ở đó $\dot{\vec{X}}$ là véc tơ các thành phần vận tốc trong chuyển động tịnh tiến của khối tâm và chuyển động quay quanh khối tâm của các khâu của cơ cấu. $\underline{\tilde{A}}$ - ma trận hằng.

Thực hiện phép đổi biến

$$\dot{\vec{X}} = \underline{\alpha} \, \dot{\vec{\beta}} \tag{3.8}$$

với

$$\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(\vec{q}, \vec{\theta}, \vec{\gamma}), \qquad \text{khi đó :} \qquad T = \frac{1}{2} \dot{\vec{\beta}}^T \; \underline{\alpha}^T \; \underline{\tilde{A}} \; \underline{\alpha} \; \dot{\vec{\beta}}.$$

Ta có hệ khảo sát với biểu thức động năng dạng (3.1), trong đó:

$$\underline{A} = \underline{\alpha}^T \, \underline{\tilde{A}} \, \underline{\alpha}. \tag{3.9}$$

Có thể sử dụng phương trình (3.6), (3.7). Từ đó:

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial \beta_m} = \Big(\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \underline{\alpha}^T}{\partial \gamma_i} \cdot \frac{\partial \gamma_i}{\partial \beta_m} + \frac{\partial \underline{\alpha}^T}{\partial \beta_m} \Big) \underline{A} \, \underline{\alpha} + \underline{\alpha}^T \underline{A} \Big(\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \underline{\alpha}}{\partial \gamma_i} \cdot \frac{\partial \gamma_i}{\partial \beta_m} + \frac{\partial \underline{\alpha}}{\partial \beta_m} \Big). \tag{3.10}$$

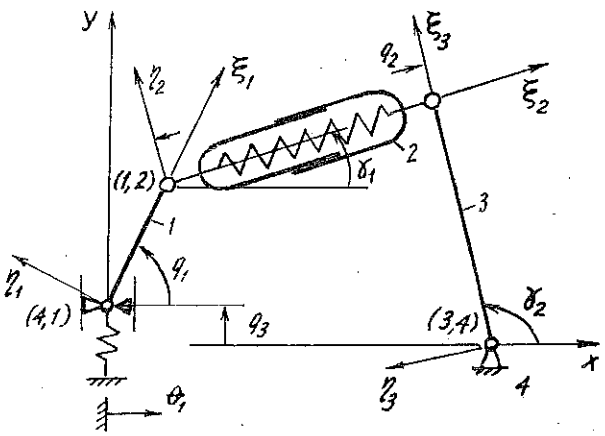
Như vậy việc tính $\vec{\psi}$ qua $\underline{A}$ được chuyển qua tính vế phải (3.10) và nhờ (3.3), (3.4) tính được $\vec{\psi}$.

4. VÍ DỤ

Cơ cấu hình 1 [3], khâu 4 là giá cố định, khâu 1 là khâu dẫn nối với giá cố định bằng lò xo (1 bậc tự do), khâu 2 đàn hồi (1 bậc tự do), khâu 3 nối với giá cố định.

a. Các tọa độ suy rộng được khảo sát là :

q_1, q_2, q_3 - các tọa độ suy rộng đủ; θ_1 - tọa độ phụ để xác định phản lực liên kết theo phương nằm ngang tại khớp (4, 1); các tọa độ có dư γ_1, γ_2. Các phương trình liên kết có dạng:



Hình 1

$$\theta_1 = 0 \quad (\dot{\theta}_1 = 0, \quad \ddot{\theta}_1 = 0) \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \theta_1 + \ell_1 \cos q_1 + (\ell_2 + q_2)\cos\gamma_1 - \ell_3 \cos\gamma_2 - \ell_4, \\ f_2 &= q_3 + \ell_1 \sin q_1 + (\ell_2 + q_2)\sin\gamma_1 - \ell_3 \sin\gamma_2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Động năng của hệ được tính theo $\underline{\tilde{A}}$ và $\dot{\vec{X}}$ với

$$\dot{\vec{X}} = \left[\dot{\varphi}_1 \; \dot{\varphi}_2 \; \dot{\varphi}_3 \; \dot{X}_1 \; \dot{X}_2 \; \dot{y}_1 \; \dot{y}_2 \right]^T \quad \text{và}$$

$$\underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} \underline{J} & & 0 \\ & \underline{m} & \\ 0 & & \underline{m} \end{bmatrix}, \qquad \underline{J} = \begin{bmatrix} J_{01} & & 0 \\ & J_{02} & \\ 0 & & J_3 \end{bmatrix}; \qquad \underline{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix};$$

$$J_3 = J_{03} + m_3(\xi_3^2 + \eta_3^2);$$

m_i, J_{0i} - khối lượng và mô men quán tính đối với khối tâm của khâu thứ i.

Để giải hệ (3.6), (3.7) ta tính $\underline{A}$ theo (3.9) nhờ phép biến đổi (3.8) với :

$$\dot{\vec{\beta}} = \left[\dot{q}_1 \; \dot{q}_2 \; \dot{q}_3 \; \dot{\theta}_1 \right]^T$$

Ta có :

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1 = q_1; \quad \varphi_2 = \gamma_1; \quad \varphi_3 = \gamma_2; \\
&x_1 = \theta_1 + \xi_1 \cos q_1; \quad x_2 = \theta_1 + \ell_1 \cos q_1 + \xi_2 \cos \gamma_1; \\
&y_1 = q_3 + \xi_1 \sin q_1; \quad y_2 = q_3 + \ell_1 \sin q_1 + \xi_2 \sin \gamma_2.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Từ (4.2), (4.3) ta tính được $\underline{\alpha}$

$$
\underline{\alpha} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\ell_1 \sin(\gamma_2 - q_1)}{d_1} & \frac{\cos(\gamma_1 - \gamma_2)}{d_1} & \frac{\sin \gamma_2}{d_1} & \frac{\cos \gamma_2}{d_1} \\
\frac{\ell_1 \sin(\gamma_1 - q_1)}{d_2} & \frac{1}{d_2} & \frac{\sin \gamma_1}{d_2} & \frac{\cos \gamma_1}{d_2} \\
-\xi_1 \sin q_1 & 0 & 0 & 1 \\
\frac{-\ell_1 \sin q_1 d_1 - \ell_1 \sin(\gamma_2 - q_1) \xi_2 \sin \gamma_1}{d_1} & \frac{-\xi_2 \sin \gamma_1 \cos(\gamma_1 - \gamma_2)}{d_1} & \frac{-\xi_2 \sin \gamma_1 \sin \gamma_2}{d_1} & \frac{d_1 - \xi_2 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2}{d_1} \\
\xi_1 \cos q_1 & 0 & 1 & 0 \\
\frac{\ell_1 \cos q_1 d_1 + \xi_2 \ell_1 \cos \gamma_1 \sin(\gamma_2 - \gamma_1)}{d_1} & \frac{\xi_2 \cos \gamma_1 \cos(\gamma_1 - \gamma_2)}{d_1} & \frac{d_1 + \xi_2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2}{d_1} & \frac{\xi_2 \cos \gamma_1 \cos \gamma_2}{d_1}
\end{bmatrix}
$$

$$
d_1 = (\ell_2 + q_2) \sin(\gamma_1 - \gamma_2), \quad d_2 = \ell_3 \sin(\gamma_1 - \gamma_2).
$$

Vì α_{ij} $(i = \overline{1,7},\ j = \overline{1,4})$ chứa các tọa độ thừa γ_1, γ_2 nên trước mỗi bước tính ta xác định γ_1, γ_2 nhờ (4.2), sau đó tính $(\underline{\alpha})_{7\times 4}$, tính $\underline{A}$ theo (3.9), tính vế phải (3.10) và nhờ (3.3), (3.4) tính được $\vec{\psi}$

Các biểu thức lực suy rộng:

$$
\begin{aligned}
Q_{1q} = & M_1 - m_1 g \xi_1 \cos q_1 - m_2 g \left[\ell_1 \cos q_1 + \xi_2 \cos \gamma_1 \frac{\ell_1 \sin(\gamma_2 - q_1)}{d_1}\right] - \\
& - m_3 g \frac{(\xi_3 \cos \gamma_2 - \eta_3 \sin \gamma_2) \ell_1 \sin(\gamma_1 - \gamma_2)}{d_2}; \\
Q_{2q} = & - m_2 g \frac{\xi_2 \cos \gamma_1 \cos(\gamma_1 - \gamma_2)}{d_1} - m_3 g \frac{\xi_3 \cos \gamma_2 - \eta_3 \sin \gamma_2}{d_2} - q_2 c_2; \\
Q_{3q} = & - m_1 g - m_2 g \frac{d_1 - \xi_2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2}{d_1} - m_3 g \frac{\xi_3 \cos \gamma_2 - \eta_3 \sin \gamma_2}{d_2} \sin \gamma_1 - q_3 c_{y41}; \\
Q_{1\theta} = & - m_2 g \frac{\xi_2 \cos \gamma_1 \cos \gamma_2}{d_1} - m_3 g \frac{\xi_3 \cos \gamma_2 - \eta_3 \sin \gamma}{d_2}.
\end{aligned}
$$

Sử dụng phương pháp Runge–Kutta bậc 4 để giải (3.6), thay các giá trị tìm được vào (3.7) ta tính được phản lực liên kết theo phương θ_1 tại khớp (4, 1).

b. Kết quả tính bằng số: Các giá trị cho trước:

$$
\begin{aligned}
&\ell_1 = 5,50cm; \quad \xi_1 = 2,25cm; \quad \eta_1 = 0cm; \quad m_1 = 2,02kg; \\
&\ell_2 = 25,00cm; \quad \xi_2 = 11,30cm; \quad \eta_2 = 0cm; \quad m_2 = 1,42kg; \\
&\ell_3 = 20,00cm; \quad \xi_3 = 11,50cm; \quad \eta_3 = -2,65cm; \quad m_3 = 1,84kg;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{01} = & 50.75kgcm^2; \quad J_{02} = 126,10kgcm^2; \quad J_{03} = 182,80kgcm^2; \\
c_2 = & 30Kp/cm; \quad c_{y_{41}} = 45Kp/cm; \\
M_1 = & M_{10}\left(1 - \frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_1 + b}\right); \quad M_{10} = 30Kpcm; \dot{q}_{1tb} = 420\text{vòng/phút}.
\end{aligned}
$$

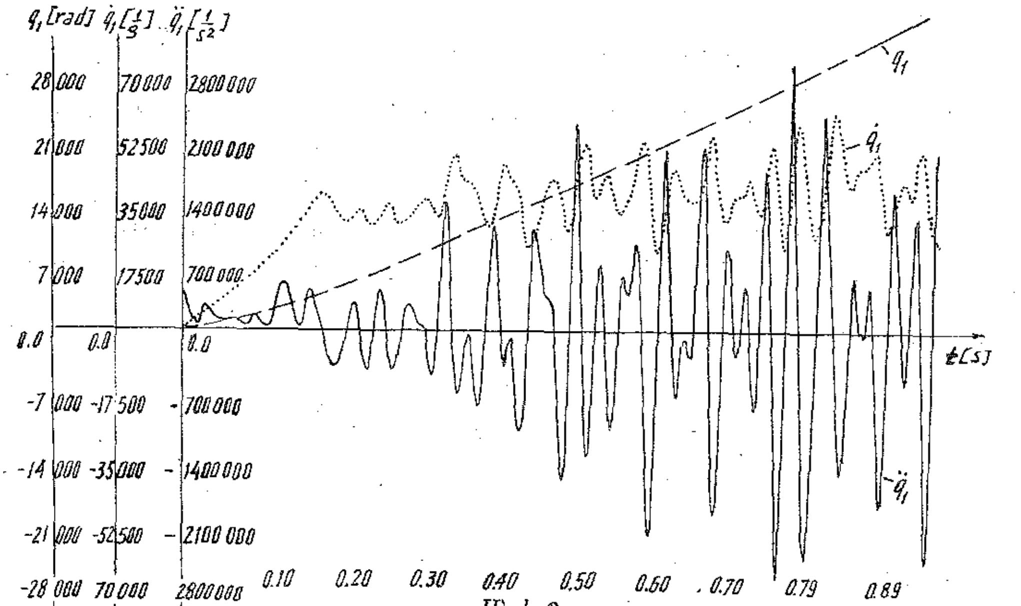
Điều kiện đầu, t = 0:

$$q_{10} = 0,7854rad; \quad \dot{q}_{10} = 0\frac{1}{s}; \quad q_{20} = 0cm; \quad \dot{q}_{20} = 0\frac{cm}{s};$$

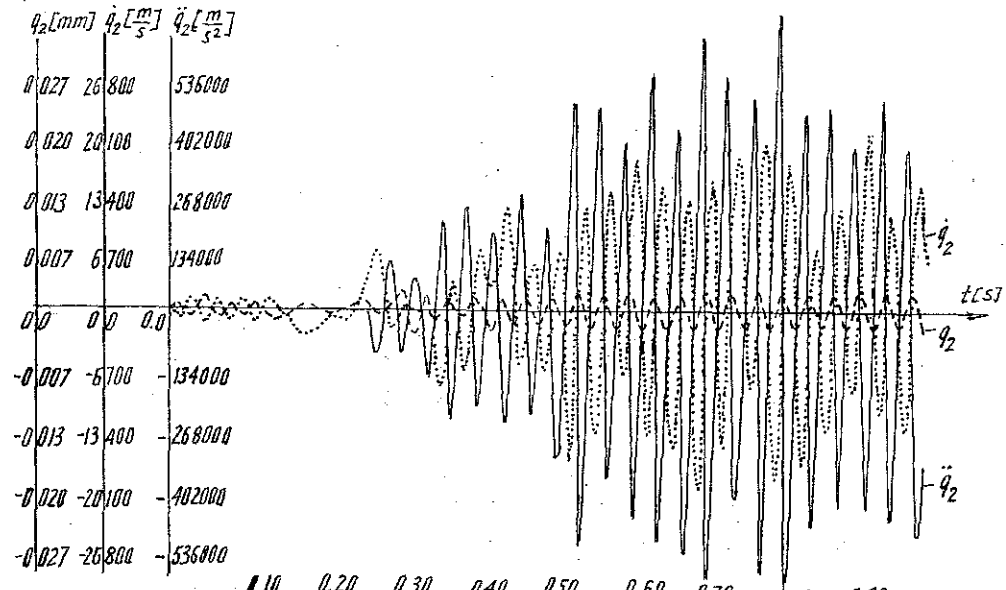
$$q_{30} = 0cm; \quad \dot{q}_{30} = 0\frac{cm}{s}; \quad \theta_1 = 0; \quad \dot{\theta}_1 = 0;$$

Trên hình 2, 3, 4, 5 mô tả chuyển động theo các tọa độ q_1, q_2, q_3 và phản lực liên kết tại khớp (4, 1) theo phương θ_1 (nằm ngang).

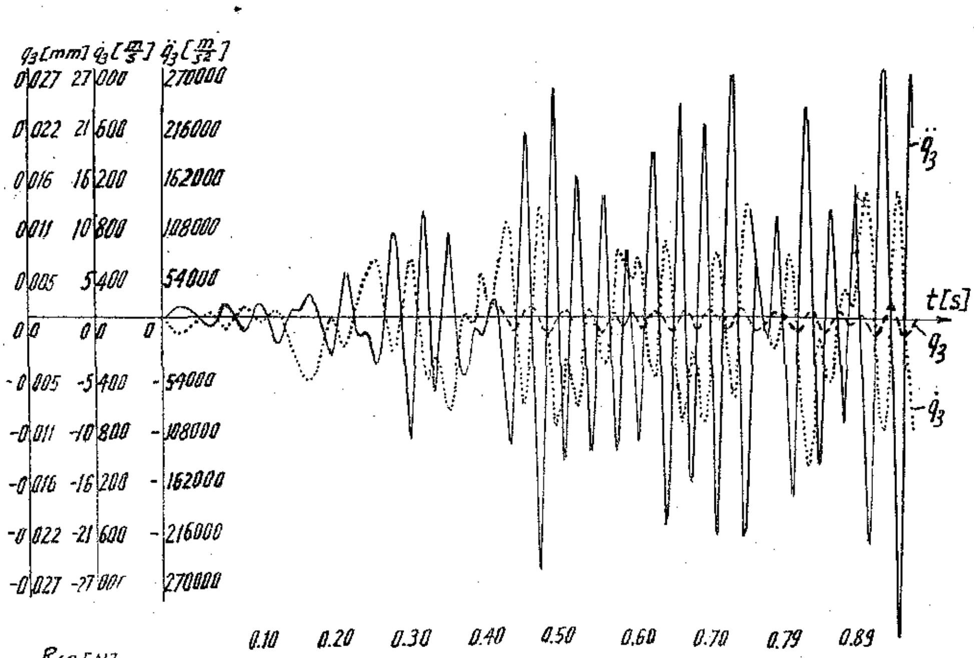
Nếu thực hiện giải phóng liên kết tại các khớp khác và đưa thêm các tọa độ phụ $\theta_2, \theta_3, \ldots$ vào ta sẽ tính được phản lực liên kết tại các khớp này.



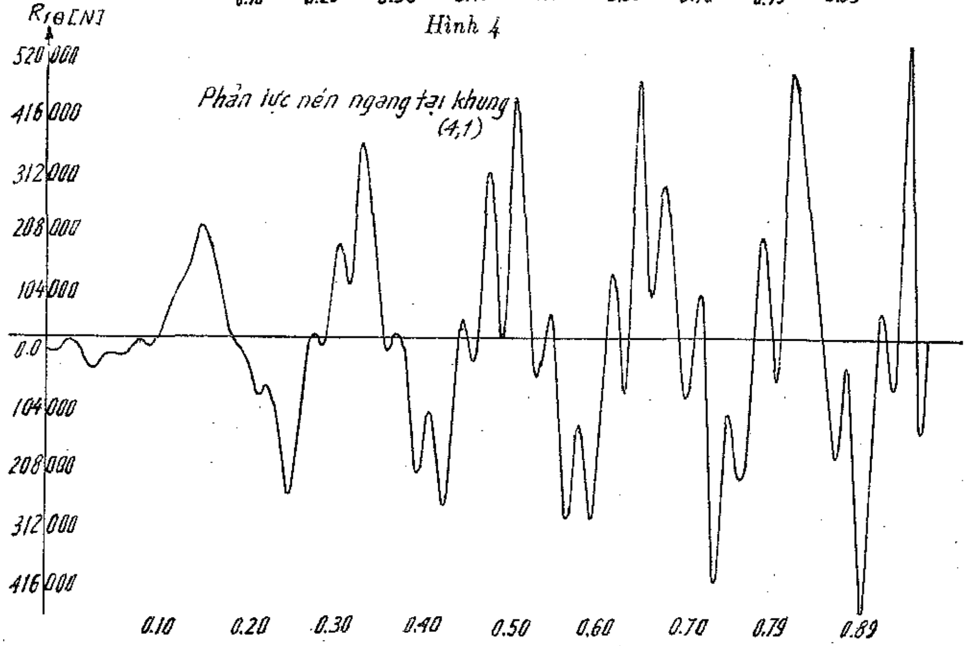
Hình 2



Hình 3



Hình 4



Hình 5

5. KẾT LUẬN

Trong bài báo đã dùng nguyên lý phù hợp và phép biến đổi hệ tọa độ khảo sát để xây dựng phương trình chuyển động và phương trình xác định phản lực liên kết. Nhờ đó việc giải các phương trình này có thể dễ dàng thực hiện bằng phương pháp số. Các phản lực liên kết tại bất kỳ khớp nào của cơ cấu đều có thể xác định và có thể tính đồng thời. Kết quả tính toán cho 1 ví dụ phù hợp với kết quả trong [3].

Địa chỉ:
Trường Đại học Bách khoa HN

Nhận ngày 1/12/1990

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Лурьё А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, М. 1961.
2. Малько Б. Д. Сенчишак В. М. Силовой анализ механизмов методам виртуальных перемешений. Изв. Буз. №5 1988.
3. Nguyen Van Khang. Uber eine Methode zur Losung der Bewegungsgleichunggen von Mechanismen mit mehreren Freiheitsgreden. Wiss. Z. d. Techn. Hochsch. Karl - Marx - Stadt 17 (1975) H.1.
4. Do Sanh. On the principle of compatibility and the equations of motion of a constrained mechanical system. ZAMM, 1960.
5. Đỗ Sanh, Phan Bùi Khôi. Xác Định phản lực trong cơ cấu phẳng. Tuyển tập các công trình nghiên cứu khoa học trường ĐHBK Hà Nội năm 1989.

РЕЗЮМЕ

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ И РАСЧЁТЕ СИЛ В МЕХАНИЗМАХ

Изложено применение принципа соглашения и преображения системы координат для построения уравнений движения и уравнений, определяющих силы реакции связей механизма. Следовательно, решение этих уравнений можно выполнено численным методом. Силы реакции связей всяких шарниров механизма можно определены и одновременно рассчитаны.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TỔNG HỢP CÁC BÀI TOÁN . . .

(tiếp trang 21)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Oden J. T. Finite elements of nonlinear continua McGRAW-HILL BOOK COMPANY 1972.
2. Бабаков И. М. Теория колебаний, издательство "Наука" 1968.
3. Демидович Б. П. и Марон И. А. Основы вычислительной математики, Физматгиз, 1970.
4. Hồ Anh Tuấn, Trần Bình. Phương pháp phần tử hữu hạn. Nhà xuất bản Khoa học, 1978.

RÉSUMÉ

MÉTHODE SYNTHÉTIQUE DE RÉSOLUTION DES PROBLÈMES D'OSCILLATION LIBRE ET FORCÉ DES STRUCTURES EN UTILISANT LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Dans cet article, l'auteur a soutenu une nouvelle méthode pour résoudre simultanément tous les deux problèmes d'oscillation d'un systèmes de structure à plusieurs degrés de liberté:

- Oscillation libre
- Oscillation forcée

En se basant sur trois théorèmes présentées, on peut trouver une méthode synthétique permettant de déterminer parallèlement les valeurs des grandeurs suivantes:

- Fréquence fondamentale et amplitude d'oscillation propre correspondante.
- Amplitude d'oscillation forcée par des forces périodiques de fréquence r donné.