TẠP CHÍ KHOA HỌC TÍNH TOÁN VÀ ĐIỀU KHIỂN TẬP VI (1990), Số 3 (11-18)

# MA TRẬN TOEPLITZ VÀ MÃ BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU CHO CÁC ĐƯỜNG CONG SỐ HÓA

LƯƠNG CHI MAI, FRIDRICH SLOBODA

*Viện Tin học,*

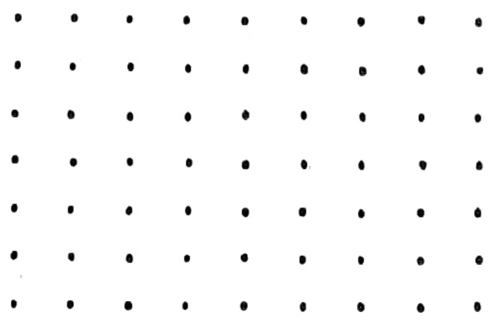
*Viện Điều khiển kỹ thuật Bratislava*

Bài báo đưa ra một phương pháp mới để mã hóa các đường cong số hóa, phương pháp này được gọi là phương pháp mã hóa theo bình phương tối thiểu. Kỹ thuật mã hóa đề xuất liên quan tới toán tử làm trơn cực đại chấp nhận được. Việc áp dụng toán tử nói trên cho phép làm trơn theo nghĩa bình phương tối thiểu đường cong số hóa khép kín đơn giản liên thông 4, đồng thời cũng đưa ra sơ đồ mã hóa bình phương tối thiểu bao gồm 272 vecto hướng khác nhau. Để thực hiện quá trình mã hóa theo phương pháp mới, bài báo đề xuất một cấu trúc băng chuyền (pipeline architecture) hoạt động với tần số cao.

Từ khóa. Làm trơn đường biên số hóa, mã hóa đường biên số hóa, ma trận Toeplitz tuần hoàn, cấu trúc băng chuyền, VLSI.

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong xử lý ảnh nói chung, một ảnh số hóa là một mảng chữ nhật hữu hạn mà các phần tử của nó được gọi là các điểm hay các phần tử ảnh [5]



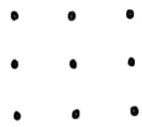
Mỗi điểm $P$ trên $\Sigma$ được xác định bởi cặp các tọa độ Đề các nhận các giá trị nguyên. Điểm $P = (x, y)$ trên một ảnh số hóa có hai dạng láng giềng:

a/ những láng giềng (u,v) trên trục nằm ngang và thẳng đứng sao cho

$$|x - u| + |y - v| = 1$$

b/ những láng giềng (u,v) nằm trên đường chéo sao cho

$$|x - u| = |y - v| = 1$$



Chúng ta sẽ gọi những láng giềng có dạng a/ là 4-láng giềng và những láng giềng cả hai dạng a/ và b/ là 8-láng giềng [6]. Một đường cong số hóa đơn giản khép kín nằm trên lưới ảnh hữu hạn $\Sigma$ là một đường $\gamma = P_0, P_1, \ldots, P_n$ sao cho [6]

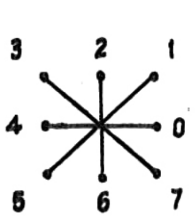
a) $P_i = P_j$ nếu và chỉ nếu $i = j$,

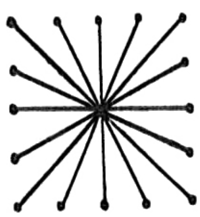
b) $P_i$ là láng giềng của $P_j$ nếu và chỉ nếu $i = j \pm 1 \pmod{n+1}$.

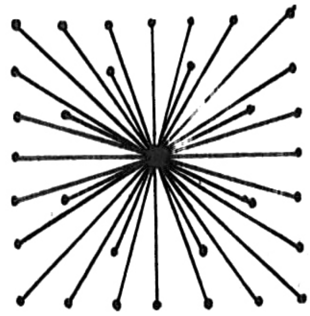
Hai điểm bất kỳ $P, Q$ trên lưới ảnh hữu hạn $\Sigma$ gọi là liên thông với nhau nếu tồn tại một đường đi $\gamma$ từ $P$ tới $Q$. Nếu các điểm láng giềng trên đường đi $\gamma$ là 4-láng giềng thì đường đi $\gamma$ gọi là đường đi 4-liên thông, nếu 8-láng giềng thì đường đi $\gamma$ gọi là đường đi 8-liên thông. Một đường cong khép kín trên lưới ảnh là một đường đi có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Để mã hóa các đường cong số hóa, Freeman trong [1,2,3] đã đề xuất các sơ đồ mã hóa đặt ra phải tuân theo các tiêu chuẩn sau [2]

- tính compac
- tính chính xác
- tính trơn
- dễ dàng mã và giải mã
- dễ xử lý.

Các sơ đồ mã hóa do Freeman đề xuất dựa trên khái niệm về mã xích được biểu diễn bởi các vecto mã hóa 4 hướng hoặc 8 hướng [1], hoặc đã được tổng quát hóa thành những vecto gồm 24 hướng [2], hoặc những vecto gồm 48 hướng





Những sơ đồ mã hóa đó cho phép giải quyết vấn đề đặt ra về hiệu quả lưu trữ, tính trơn và thời gian xử lý [2]. Những sơ đồ mã xích nói trên đã được sử dụng trong các ứng dụng về xử lý dữ liệu bản đồ [2]

Bài báo đưa ra một phương pháp mã hóa mới gọi là mã bình phương tối thiểu biểu diễn các đường cong số hóa. Kỹ thuật mã hóa này liên quan tới toán tử làm trơn cực đại chấp nhận được, nó cho phép làm trơn các đường cong số hóa khép kín liên thông 4 theo nghĩa bình phương tối thiểu. Với toán tử này tạo ra 272 vecto hướng khác nhau để biểu diễn đường cong. Đối với các toán tử làm trơn được biểu diễn bằng ma trận tuần hoàn Toeplitz, đó là dạng ma trận mà tổng các thành phần trên hàng là hằng số, mảng systolic ở mức bit (bit-level systolic array) đã được đề xuất [4]. Mảng này có cấu trúc băng chuyền đầy đủ, vì vậy nó đạt được tần xuất thực hiện cao.

## 2. TOÁN TỬ LÀM TRƠN CỰC ĐẠI CHẤP NHẬN ĐƯỢC

Giả sử rằng $x = x(t), y = y(t)$ là một đường cong khép kín đơn giản trong không gian Ơcơlit 2 chiều $R_2$. Giả thiết rằng đường cong này đã được xấp xỉ hóa bởi tập $N$ điểm $P_1, P_2, \dots P_n$. Các điểm này là các phần tử của mảng chữ nhật hữu hạn $\Sigma$, chúng biểu diễn một đường cong khép kín đơn giản liên thông 4. Giả sử

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & y1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & y_N \end{bmatrix}$$

là ký hiệu ma trận của tất cả các điểm rời rạc trên đường cong số hóa. Để đảm bảo tính trơn và tính chính xác của biểu diễn đường cong, dùng phương pháp bình phương tối thiểu để xấp xỉ hóa hàm biểu diễn đường cong số hóa bằng các đa thức trực giao. Kết quả của phép làm trơn theo nghĩa bình phương tối thiểu một đường cong số hóa khép kín liên thông 4 sẽ được biểu diễn bằng những toán tử tuyến tính $(1/c)C$ áp trên $X$ với $C$ là ma trận Toeplitz tuần hoàn cỡ $N \times N$ và $c$ là tổng các giá trị của các phần tử trên hàng của ma trận C. Những toán tử này làm cực tiểu các sai số do rời rạc hóa và lượng tử hóa. Tập con của các toán này rất phù hợp để xấp xỉ những đường cong số hóa và chúng được gọi là các toán tử chấp nhận được [7]. Giả thiết rằng:

$$1/c)CX = X'$$

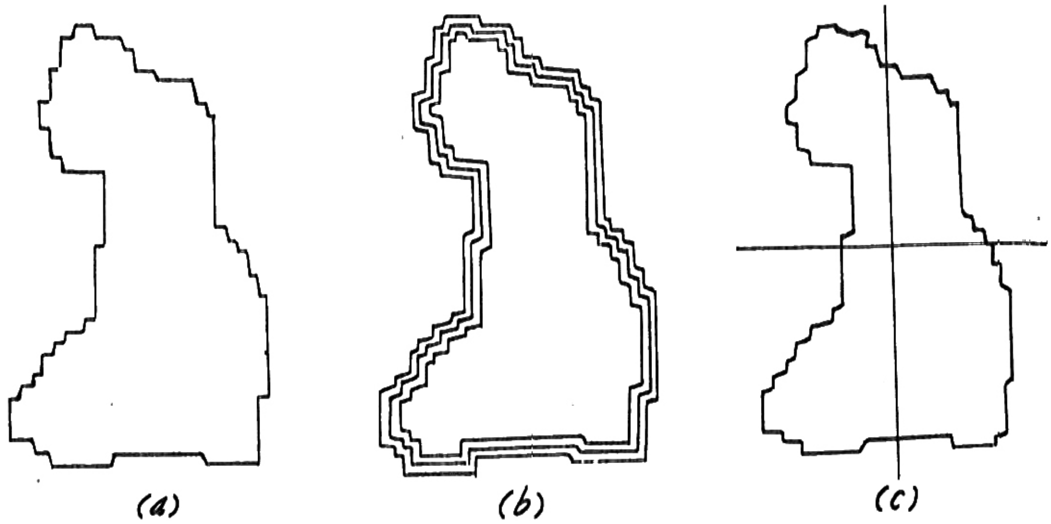
với $X'$ có các phần tử $x_i'$ và $y_i'$ là các tọa độ của đường cong làm trơn. $(1/c)C$ là toán tử chấp nhận được nếu [7]:

$$|x_i - x_i'| < 1/2\,, \quad |y_i - y_i'| < 1/2 \tag{1}$$

Theo định nghĩa trên, toán tử chấp nhận được bởi ràng buộc về làm trơn theo phương pháp bình phương tối thiểu thỏa mãn (1) sẽ xác định một hành lang mà đường cong đã được số hóa sẽ nằm trong đó (xem hình 1). Trong [7,8] đã chỉ ra rằng toán tử

$$(1/c)C = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & & & -2 & 3 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 3 & -2 & 0 & 0 & & & 0 & -2 & 3 \\ \dots & & & & & & & & & & & \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & & & -2 & 3 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & -2 & 0 & 0 & & & 0 & -2 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \tag{2}$$

thực hiện việc làm trơn cực đại theo phương pháp bình phương tối thiểu với đa thức xấp xỉ bậc ba cho các cung gồm 7 điểm của đường cong số hóa (xem hình 1)

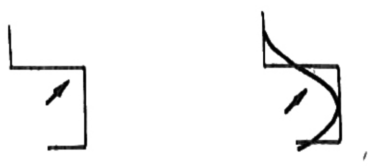



*Hình 1.* (a) là đường cong số hóa liên thông 4
(b) là hành lang mà đường cong ban đầu nằm trên đó
(c) là đường biên đã được làm trơn bởi toán tử (2)

Đối với toán tử (2), điều kiện sau được thỏa mãn

$$|x_i - x_i'| \leq 10/21\,, \quad |y_i - y_i'| \leq 10/21 \tag{3}$$

với 10/21 là giá trị cực đại nhỏ hơn 1/2 trong số tất cả các giá trị tương ứng với toán tử tuyến tính xác định bởi đa thức bậc một và bậc ba [8]. Toán tử (2) được xác định bởi phép làm trơn hàm biểu diễn đường cong số hóa bằng phương pháp bình phương tối thiểu qua những đa thức trực giao bậc ba và cung để xấp xỉ gồm 7 điểm. Điều đó có nghĩa rằng mọi cung số hóa liên thông 4 có độ dài gồm 7 điểm được xấp xỉ hóa theo nghĩa bình phương tối thiểu bằng đường cong xác định qua những đa thức trực giao bậc ba và tọa độ được làm trơn tương ứng với điểm giữa của cung số hóa ( xem hình 2).



*Hình 2*

Đối với toán tử (2), trong [4] đã đề xuất một mảng systolic ở mức bit để thực hiện quá trình làm trơn. Mảng này có cấu trúc băng chuyền hoàn toàn cho nên nó được thực hiện với tần suất cao và đạt được thông lượng lớn. Giả sử rằng

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$$

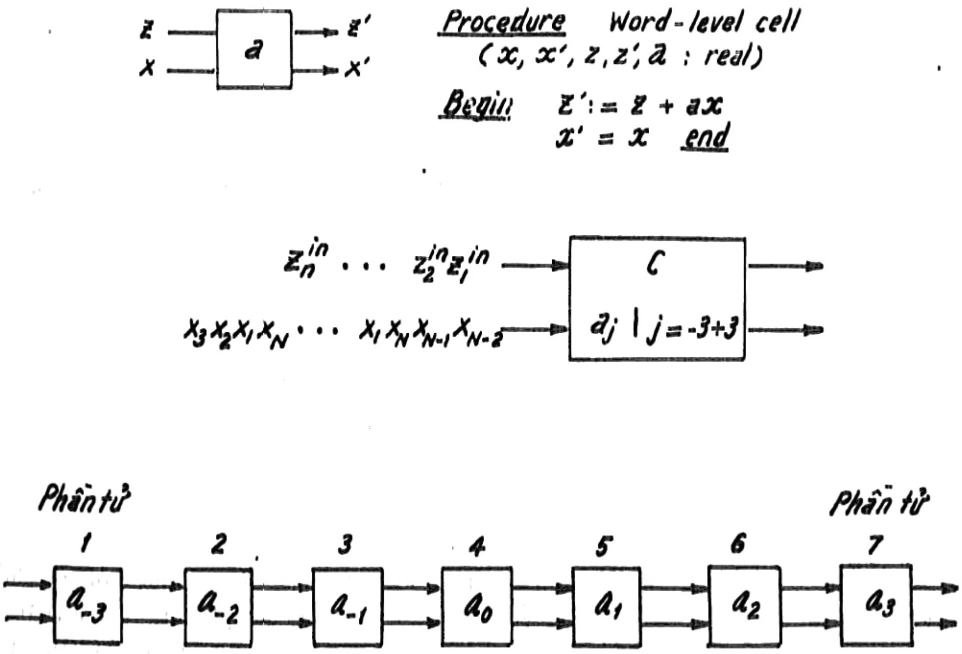
mảng systolic thực hiện phép nhân ma trận với vecto $U = Cx$ với $C$ được xác định bởi (2). Phép nhân ma trận với ma trận $CX$ có thể được thực hiện qua hai phép nhân ma trận với vecto. Ta gọi những phần tử khác không trên hàng của ma trận (2) là:

$$a_{-3} = 2, \quad a_{-2} = 3, \quad a_{-1} = 6, \quad a_0 = 7, \quad a_1 = 6, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 2$$

Phép nhân ma trận với vecto có thể biểu diễn bởi tích chập tuần hoàn

$$u_i = \sum_{j=-3}^{3} a_j x_{(i-j) mod N} \qquad j = 1, 2, \dots, N$$

với $u_i$ là thành phần thứ $i$ của $u$ và $x_0 = x_N$. Mảng systolic ở mức từ (word-level sytolic array) của tích chập tuần hoàn đó được chỉ ra trên hình 3.




Hình 3

$\dots X_i \dots$ là dòng dữ liệu biểu diễn tọa độ $x$ của điểm số hóa trên đường cong
$\dots Z_i^{in} \dots$ là dòng dữ liệu bằng 0 tại đầu vào của phần tử 1. Tại đầu vào của các phần tử từ thứ hai đến thứ 7, $\dots Z_i^{in} \dots$ là dòng dữ liệu mà mỗi thành phần được tính như mô tả trong thủ tục Procedure word-level cell.

## 3. MÃ HÓA ĐƯỜNG CONG SỐ HÓA BẰNG CẤU TRÚC BĂNG CHUYỀN

Đường cong số hóa đã làm trơn $X'$ được xác định qua

$$4(1/c)CX = X' \tag{4}$$

với $c = 21$ và $C$ được xác định bởi (2). Sơ đồ mã hóa đường cong đã làm trơn $X'$ liên quan tới toán tử làm trơn cực đại chấp nhận được (1). Sơ đồ mã hóa này được gọi là sơ đồ mã hóa theo bình phương tối thiểu. Các tọa độ $x_i'$ và $y_i'$ của $X'$ không thuộc về mảng ban đầu $\Sigma$, bởi vậy sơ đồ mã hóa tương ứng không thuộc về các sơ đồ mã xích [3]. Các sơ đồ mã xích này xác định trên các điểm của lưới điểm ảnh ban đầu $\Sigma$. Để xác định hướng của các vecto trên sơ đồ mã bình phương qua cặp tọa độ $x_i'$ và $y_i'$ ta xét (4) ở dạng

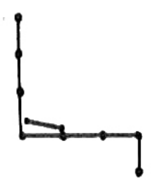
$$CX = cX' \tag{5}$$

Các vecto tương ứng khi đó được xác định bởi

$$ca_{ix} = cx_i' - cx_{i+1}'$$

$$ca_{iy} = cy_i' - cy_{i+1}'$$

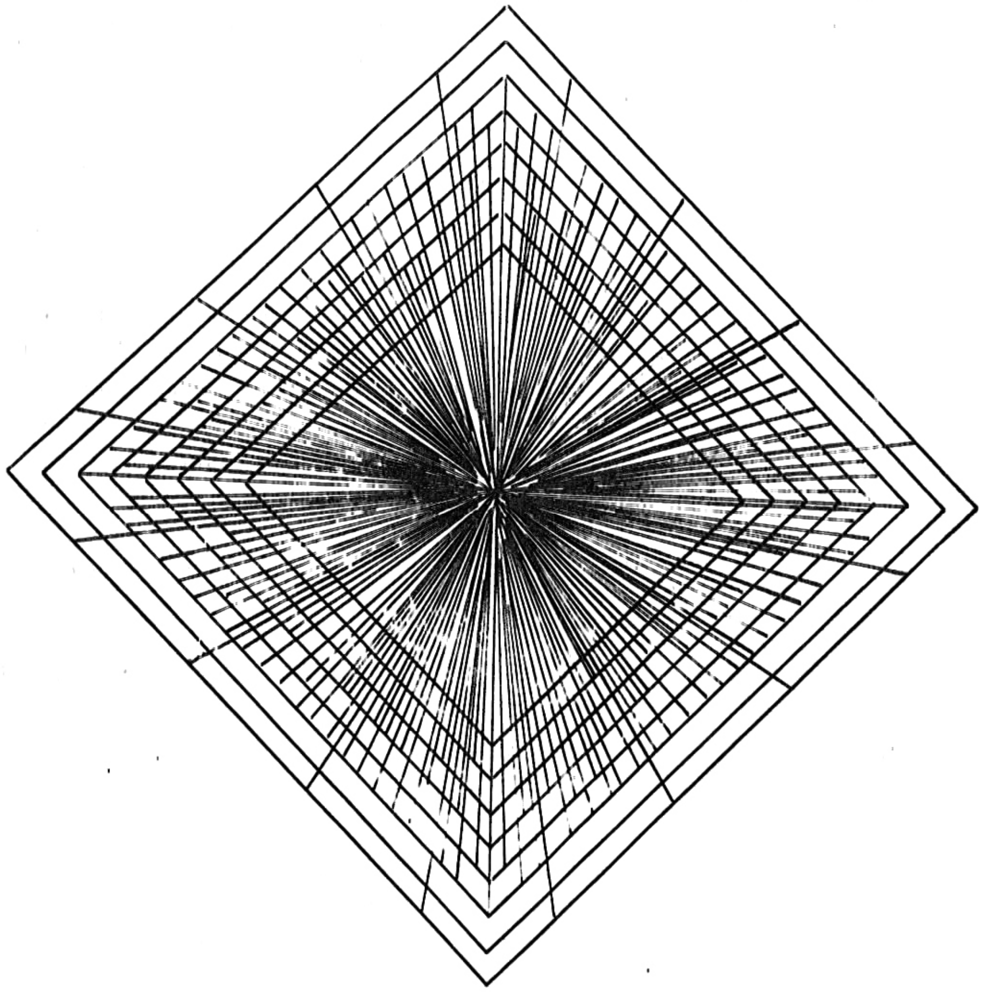
Các tọa độ đã được làm trơn $(x_i', y_i')$ và $(x_{i+1}', y_{i+1}')$ tương ứng với điểm giữa của hai cung số hóa liên thông 4 liền nhau cùng có độ dài 7 điểm (xem hình 4)



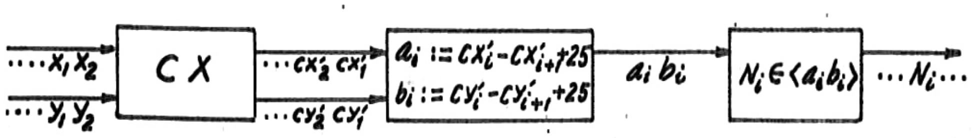
Hình 4

Để xác định các vecto hướng, điều đầu tiên phải phân tích tất cả các khả năng có thể xảy ra của các cung số hóa liên thông 4 có độ dài 8 điểm. Các vecto đó trên góc phần tám thứ nhất của mặt phẳng là: $(ca_{ix}, ca_{iy}) \in \{(15,0), (19,0), (21,0), (25,0), (14,1), (20,1), (22,1), (17,2), (19,2), (23,2),$ $(12,3), (16,3), (18,3), (22,3), (11,4), (17,4), (25,4), (14,5), (16,5), (20,5), (9,6), (13,6), (15,6), (19,6),$ $(14,7), (18,7), (11,8), (13,8), (17,8), (12,9), (16,9), (11,10), (15,10), (14,11), (18,11), (13,12)\}$. Các vecto trên góc phần tám thứ hai của mặt phẳng là các vecto đối xứng với các vecto trên qua đường chéo. Tổng số các vecto là 272 và chúng có thể được biểu diễn như trên sơ đồ ở hình 5. Các vecto này được xác định lần nữa trên lưới vuông của các điểm qua phép quay 45°. Đơn vị khoảng cách của lưới vuông này là $\sqrt{2}/21$. Những vecto được xác định bởi các điểm biên của các hình vuông cách đều nhau. Độ dài tối thiểu của vecto có giá trị $\sqrt{117}/21 = 0,575018$ và độ dài cực đại của vecto có giá trị $\sqrt{641}/21 = 1,205618$. Những vecto được đánh số theo chiều tăng của góc $\alpha$ với trục $x$ và theo chiều tăng của chuẩn nếu như có nhiều hơn một vecto cùng có chung góc

$\alpha$ với trục $x$. Chúng được đánh số bởi các số $N_i \in [0, 271]$ theo thứ tự của chúng.



Góc cực đại giữa hai vecto kề nhau trên sơ đồ xấp xỉ bằng $2''$ (trong trường hợp mã xích 48 vecto, góc này vào khoảng $18''$). Chuỗi mã của đường biên đã được làm trơn được xác định bởi dãy các số tương ứng trong sơ đồ trên. Sơ đồ mã hóa trên là bất biến đối với điểm khởi đầu, điều này không cho phép trong các sơ đồ mã xích. Theo các tọa độ của các vecto trên góc phần tám thứ nhất, ta có: $ca_{i_x} \in [-25, 25]$, $ca_{i_y} \in [-25, 25]$, vì vậy $ca_{i_x} + 25 \in [0, 50]$, $ca_{i_y} + 25 \in [0, 50]$. Mã hóa một đường biên đã được làm trơn bởi toán tử (2) có thể được thực hiện bởi cấu trúc sau:




Theo cấu trúc này có ba loại thành phần xử lý khác nhau. Phần tử xử lý thứ nhất thực hiện phép toán nhân ma trận với ma trận $CX$ bằng cấu trúc của systolic array chỉ ra trên hình 3. Phần tử thứ hai như một cell trong cơ chế băng chuyền để tính các địa chỉ $a_i, b_i$ của cặp tọa độ

$x'_i, y'_i$. Trong phần tử thứ ba mỗi $a_i, b_i$ được xem như địa chỉ trên bộ nhớ 4KW (LUT - look.up table) (mỗi $a_i$ và $b_i$ cần 6 bit), $N_i$ là nội dung tại địa chỉ đó ($N_i \in [0, 271]$) và chúng được tổ chức như cấu trúc băng chuyền, nội dung từ địa chỉ tương ứng được đọc ra từ bộ nhớ LUT. Tần số của băng chuyền này trên VLSI là mano giây và cấu trúc này được đưa ra cho các ứng dụng thời gian thực.

## 4. KẾT LUẬN

Trong bài báo mô tả cách mã hóa các đường biên số hóa theo toán tử cực đại chấp nhận được và mô tả cấu trúc băng chuyền để thực hiện sơ đồ mã hóa đề xuất. Sơ đồ này sử dụng 272 vecto hướng khác nhau, các vecto này cho phép làm trơn đường cong số hóa khép kín đơn giản liên thông 4 và cho phép tính chu vi của đường cong với độ chính xác cao. Sai số trung bình của tính toán độ dài của đường cong khép kín đơn giản vào khoảng 1%, sai số này nhỏ hơn rất nhiều so với việc sử dụng các kỹ thuật đã thông báo cho tới nay. Cấu trúc băng chuyền đề xuất được thực hiện với tần số cao và nó được đưa ra cho các ứng dụng thời gian thực. Các đường cong đã được mã hóa làm tiết kiệm bộ nhớ và phù hợp cho các nhu cầu về điểm.

*Nhận ngày 5-1-1990*

## 5. TÀI LIỆU TRÍCH DẪN

1. H. Freeman, Computer processinq of line drawinq images. Computing Surveys 6 (1974), 57-97.

2. H. Freeman, Application of the generalized chain coding scheme to map data processing, in: Proc. IEEE Comp. Soc. Conf. on Pattern Recognition and Image Processing, IEEE Computer Society, (1978) 220-226.

3. H. Freeman and J. A. Saghri, Compative analysis of line-drawing modeling schemes, Computer Graphics and Image Processing 12 (1980), 203-223.

4. N. Petkop and F. Sloboda, A bit-level systolic array for digital contour smoothing, Parallel Computing, 6 (1989) to appear.

5. A. Rosenfeld and Kak, Digital picture processing (AP, N. Y., 1976).

6. A. Rosenfeld, Picture languages (AP, N. Y., 1979).

7. F. Sloboda, Toeplitz matrices, homothety and least-squares approximation, in: D. J. Evans and C. N. Sutti, ed. Proc. of the Int. Meeting on Parallel Computing. (Adam Higer. 1989), 237-248.

8. F. Sloboda, Toeplitz matrices, curvature and lest-squares approximation, in Proc. of the Int. Conf. on Parallel Computing, (1989) to appear.

## ABSTRACT

### TOEPLITZ MATRICES AND LEAST-SQUARES CODING

Digital contour coding is described. The coding technique is associated with the maximal feasible smoothing operator which smooths the original simply closed 4-connected digital curve in the least-squares sense. This smoothing operator generates 272 permissible direction vectors. For the realisation of the resulting coding technique a pipeline architecture has been suggested which operates with high cloch frequency.