TẠP CHÍ KHOA HỌC TÍNH TOÁN VÀ ĐIỀU KHIỂN TẬP VI (1990), SỐ 2 (15-20)

XÂY DỰNG LƯỢC ĐỒ SAI PHÂN SUY RỘNG TỰA ĐƠN ĐIỆU CÓ ĐỘ ĐÚNG CẤP CAO CHO MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH

ĐẶNG QUANG Á

Viện Tin học

Trong bài này dùng khai triển nghiệm của lược đồ sai phân cho các bài toán không dừng và các hệ thức rút ra từ các phương trình vi phân, chúng tôi xây dựng được lược đồ sai phân suy rộng tựa đơn diệu hoặc ổn định có độ đúng cấp cao cho một số phương trình và hệ phương trình.

Mục đích của bài này là giải quyết mâu thuẫn giữa tính đơn điệu và xấp xỉ bậc cao của lược đồ sai phân cho phương trình chuyển dịch, phương trình parabôlic và tính ổn định và xấp xỉ bậc hai của lược đồ sai phân hiện cho hệ phương trình khí động học trong biến Ơle. Mâu thuẫn này đã được giải quyết chưa triệt để trong [1], cụ thể là ở đó mới chỉ xây dựng được lược đồ sai phân đơn điệu hoặc ổn định có độ đúng cấp cao, hoặc theo bước thời gian τ, hoặc theo bước không gian t.

1. Chúng ta sẽ xét bài toán không dừng dạng

$$Au = f(t,x), 0 < t \leq T, -\infty < x < +\infty \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \tag{2}$$

trong đó A là một toán tử vi phân.

Ta đưa vào lưới đều

$$\omega_{\tau h} = \{(t_k, x_i),\ t_k = k\tau,\ k = \overline{1,K};\ K\tau \leq T,\ x_i = ih,\ i = 0, \pm 1, \ldots\}$$

Định nghĩa 1. [2] Họ các lược đồ sai phân

$$A_{\tau h}^{(j)} y^{(j)} = f^{(j)},\ (t,x) \in \omega_{\tau h}, \tag{3}$$

$$y^{(j)}|_{t=0} = u_0(x),\ j = \overline{1,p}, p \geq 1 \tag{4}$$

$$y = \alpha_1 y^{(1)} + \alpha_2 y^{(2)} + \ldots + \alpha_p y^{(p)} \tag{5}$$

trong đó $\alpha_j (j = \overline{1,p})$ là các hệ số không phụ thuộc τ, h và

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = 1 \tag{6}$$

được gọi là lược đồ sai phân suy rộng.

Mỗi lược đồ (3), (4) được gọi là lược đồ sai phân cơ sở.

Định nghĩa 2. [6] Lược đồ sai phân

$$A_{\tau h} y = f$$

với các điều kiện ban đầu được gọi là đơn điệu (hay có xấp xỉ dương) nếu khi $f = 0$ có thể biểu diễn

$$y_{i,k+1} = \sum_{\mu,\nu} \alpha_\mu^\nu y_{i+\mu,k+\nu} \tag{7}$$

trong đó $\alpha_\mu^\nu \geq 0$.

Định nghĩa 3. Lược đồ sai phân suy rộng (3)-(6) được gọi là tựa đơn điệu nếu mỗi lược đồ sai phân cơ sở (3), (4) đơn điệu.

Dưới đây ta sẽ xây dựng lược đồ sai phân suy rộng tựa đơn điệu hoặc ổn định có độ đúng cấp cao cho một số phương trình và hệ phương trình. Để đơn giản ta sẽ giả thiết rằng vế phải và nghiệm của bài toán vi phân có độ trơn cần thiết. Các ký hiệu sai phân dùng thống nhất theo Samarski [5].

2. Xét bài toán Côsi đối với phương trình chuyển dịch

$$Au \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x) \tag{8}$$

Cho tương ứng bài toán này lược đồ sai phân suy rộng (3) - (6), trong đó

$$A_{\tau h}^{(j)} y^{(j)} \equiv y_t^{(j)} + y_{\overset{\circ}{x}}^{(j)} + a_j \frac{h}{2} y_{\bar{x}x}^{(j)}, \quad a_j = const \tag{9}$$

$$f^{(j)} = \tilde{f} = f + \frac{\tau}{2} g, \; g = \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial x} \tag{10}$$

Định lý 1. Nếu

$$a_j \leq -1, r = \frac{\tau}{h} \leq -\frac{1}{a_j}, \quad j = \overline{1, p} \tag{11}$$

thì

1) Lược đồ sai phân suy rộng (3)-(6), (9), (10) là tựa đơn điệu

2) Khi $p = 2$,

$$\alpha_1 = \frac{a_2 + r}{a_2 - a_1}, \quad \alpha_2 = -\frac{a_1 + r}{a_2 - a_1} \tag{12}$$

lược đồ sai phân suy rộng trên cho nghiệm xấp xỉ của bài toán (8), (2) với độ đúng $O(\tau^2, h^2)$, nghĩa là

$$y - u = O(\tau^2, h^2) \tag{13}$$

trong đó u là nghiệm đúng của bài toán (8), (2).

Chứng minh: Mệnh đề 1 dễ dàng thu được nếu viết phương trình $A_{\tau h}^{(j)} y^{(j)} = 0$ trong dạng (7) và kiểm tra điều kiện $\alpha_\mu^\nu \geq 0$.

Ta sẽ chứng minh mệnh đề 2.

Khi điều kiện (11) được thỏa mãn, các lược đồ sai phân cơ sở không chỉ đơn điệu mà sẽ ổn định theo chuẩn $\|.\|_C$ và đối với nghiệm của chúng ta có ước lượng

$$\|y_{k+1}^{(j)}\|_C \leq \|u_0\|_C + T \max_{0<k'\leq K} \|\tilde{f}_{k'}\|_C \tag{14}$$

Hơn thế, sử dụng kỹ thuật trong [3] ta sẽ chứng tỏ rằng nghiệm của lược đồ sai phân cơ sở có biểu diễn

$$y^{(j)} = u + \frac{h}{2}(r + a_j)w + \eta^{(j)}, \quad (t,x) \in \omega_{\tau h} \tag{15}$$

trong đó w là nghiệm của bài toán

$$Aw = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad w|_{t=0} = 0 \tag{16}$$

và $\eta^{(j)}$ là hàm lưới thỏa mãn ước lượng

$$\eta^{(j)} = O(\tau^2, h^2) \tag{17}$$

Thật vậy, thay $y^{(j)}$ theo công thức (15) vào phương trình (3), (10) ta được

$$A_{\tau h}^{(j)} y^{(j)} = a_{\tau h}^{(j)} u + \frac{h}{2}(r + a_j) A_{\tau h}^{(j)} w + A_{\tau h}^{(j)} \eta^{(j)} = f + \frac{\tau}{2} g \tag{18}$$

Sử dụng hệ thức

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g$$

rút ra từ phương trình (8) ta được

$$A_{\tau h}^{(j)} u = Au + \frac{\tau}{2} g + \frac{h}{2}(r + a_j)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\tau^2, h^2) \tag{19}$$

Ngoài ra để ý rằng

$$A_{\tau h}^{(j)} w = Aw + O(\tau, h)$$

từ đẳng thức (18) ta rút ra

$$A_{\tau h}^{(j)} \eta^{(j)} = O(\tau^2, h^2)$$

Dùng ước lượng (14) cho $\eta^{(j)}$ với $\eta^{(j)}|_{t=0} = 0$ ta sẽ được ước lượng (17) cần chứng minh.

Nhận xét 1. Từ hệ thức (19) ta thấy rằng nếu $a_j \doteq -r$ thì lược đồ sai phân cơ sở có xấp xỉ bậc $O(\tau^2, h^2)$ trên nghiệm của bài toán (8), (2) nhưng lược đồ này không đơn điệu. Lược đồ này có tên gọi là "trò chơi nhảy cừu" (xem [4]).

3. Xét bài toán Côsi cho phương trình parabôlic

$$Au \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x) \tag{20}$$

Cho bài toán này tương ứng lược đồ sai phân suy rộng (3)-(6) trong đó

$$A_{\tau h}^{(j)} y^{(j)} = y_t^{(j)} - y_{\bar{x}x}^{(j)} + a_j \frac{h}{2} y_{\bar{x}x\bar{x}x}, \; a_j = const \tag{21}$$

$$f^{(j)} = \tilde{f} = f + \frac{\tau}{2}g, \quad g = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{22}$$

Định lý 2. Nếu

$$-\frac{1}{4} \leq a_j \leq 0, \; 0 < r = \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2 + 6a_j}, \; j = \overline{1, p}$$

thì

1) lược đồ sai phân suy rộng (3)-(6), (21), (22) là tựa đơn điệu,

2) khi $p = 2$,

$$\alpha_1 = \frac{a_2 + r - 1/6}{a_2 - a_1}, \quad \alpha_2 = -\frac{a_1 + r - 1/6}{a_2 - a_1}$$

lược đồ sai phân suy rộng trên cho nghiệm xấp xỉ của bài toán (20), (2) với độ đúng $O((\tau^2, h^4)$, nghịa là

$$y - u = O(\tau^2, h^4)$$

trong đó u là nghiệm đúng của bài toán (20), (2).

Chứng minh: Định lý này được chứng minh tương tự như định lý 1 nhờ biểu diễn sau của nghiệm của lược đồ sai phân cơ sở

$$y^{(j)} = u + \frac{h^2}{2}(r - \frac{1}{6} + a_j)w + O(\tau^2, h^4)$$

trong đó w là nghiệm của bài toán

$$Aw = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^2}, \quad w|_{t=0} = 0$$

Nhận xét 2. Do cách chọn tham số a_j có thể đạt được giá trị của r mà lược đồ sai phân suy rộng tựa đơn điệu là $0 < r \leq 2$.

Bây giờ xét một lược đồ sai phân suy rộng khác, trong đó các lược đồ sai phân cơ sở là lược đồ ba lớp dạng

$$y_t^{(j)} - y_{\bar{x}x}^{(j)} + a_j \frac{\tau}{2} y_{\bar{t}t}^{(j)} = f + (\frac{h^2}{12}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}) \tag{23}$$

$$y_0^{(j)} = u_0 \tag{24}$$

$$y_1^{(j)} = u_0 + \tau(f_0 + u_{0,\bar{x}x})$$

Định lý 3. Nếu $r \leq a_j/2 \leq 1/2$ thì

1) lược đồ sai phân suy rộng (23), (24), (5), (6) là tựa đơn điệu

2) khi p = 2,

$$\alpha_1 = \frac{ra_2 - 1/6}{r(a_2 - a_1)}, \quad \alpha_2 = \frac{1/6 - ra_1}{r(a_2 - a_1)}$$

lược đồ sai phân suy rộng trên cho nghiệm xấp xỉ của bài toán (20), (2) với độ đúng $O(\tau^2, h^4)$.

4. **Xét hệ phương trình của khí động học trong biến Ơle**

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + u^* \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

trong đó $u^* = const > 0$, $c^2 = const > 0$.

Ta đưa vào ký hiệu

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 & u^* \end{pmatrix}$$

Khi đó hệ phương trình (25) viết được dưới dạng

$$AU = \frac{\partial U}{\partial t} + B\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{26}$$

Người ta đã chứng minh rằng không thể đồng thời đạt được tính ổn định và xấp xỉ bậc hai hoặc cao hơn trong lớp các lược đồ sai phân hiện đối với hệ phương trình (25).

Dưới đây bằng phương pháp hiệu chỉnh tham số ta sẽ xây dựng lược đồ sai phân suy rộng có độ dúng cấp hai là tổ hợp tuyến tính của các lược đồ sai phân cơ sở ổn định, và do đó dễ thấy rằng nó cũng sẽ ổn định.

Ký hiệu

$$D_j = \begin{pmatrix} d_{1j} & d_{2j} \\ d_{3j} & d_{4j} \end{pmatrix}, \; d_{ij} = const$$

Xét lược đồ sai phân suy rộng

$$A_{rh}^{(j)} Y^{(j)} = Y_t^{(j)} + BY_{x^0}^{(j)} + D_j \frac{h}{2} Y_{\bar{x}x}^{(j)} = 0 \quad (j = \overline{1,5}) \tag{27}$$

$$Y = \sum_{j=1}^{5} \alpha_j Y^{(j)} \tag{28}$$

$$\sum_{j=1}^{5} \alpha_j = 1 \tag{29}$$

Trong một số điều kiện đặt lên các hệ số d_{ij} lược đồ sai phân cơ sở sẽ ổn định.

Định lý 4. Giả sử các lược đồ sai phân cơ sở (27) ổn định. Thế thì khi chọn $\alpha_j (j = \overline{1,5})$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\sum_{j=1}^{5} \alpha_j = 1$$

$$\sum_{j=1}^{5} d_{1j} \alpha_j = -rc^2$$

$$\sum_{j=1}^{5} d_{2j} \alpha_j = -ru^*$$

$$\sum_{j=1}^{5} d_{3j}\alpha_j = -rc^2u^*$$

$$\sum_{j=1}^{5} d_{4j}\alpha_j = -r(c^2 + u^{*^2})$$

lược đồ sai phân suy rộng (27)-(29) cho nghiệm xấp xỉ của hệ phương trình (25) với độ đúng $O(\tau^2, h^2)$.

Chứng minh: Có thể chứng minh được rằng nghiệm của lược đồ sai phân cơ sở có biểu diễn

$$Y^{(j)} = U + \frac{h}{2}P_j w + O(\tau^2, h^2)$$

trong đó

$$P_j = \begin{pmatrix} rc^2 + d_{ij} & ru^* + d_{2j} \\ rc^2u^* + d_{3j} & r(c^2 + u^{*^2}) + d_{4j} \end{pmatrix}$$

W là véc tơ hàm không phụ thuộc τ, h và D_j.

Nhờ biểu diễn trên định lý sẽ được chứng minh.

Nhận ngày 1-1-1990

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Белоцерковский О. М. и др., Метод параметрической коррекцуй разностных схем. Ж В М М Ф, Т. 24, No. 1.
2. Белоцерковский О. М. и др., Обобшенные разностные схемы и метод параметрической коррекций расностных схем. – В кн.: Кибернетика и вычислительная техника, М.: Наука, 1985.
3. Марчук Г. И., Повышение точности решения разностных схем. М.: Наука, 1981.
4. Пасконов В. М. и др., Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984.
5. Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
6. Fridrichs K. O., Symmetric hyperbolic linear differential equations. – Communs Purs and App. Math., 1954, V.7, No.2.

ABSTRACT

CONSTRUCTION OF QUASIMONOTONE GENERALIZED DIFFERENCE SCHEMES HAVING HIGH ORDER OF ACCURACY FOR SOME EQUATIONS

In this paper with the help of the asymptotic error expansion to finite difference schemes for nonstationary problems and the corollaries of the differential equations we have constructed generalized difference schemes quasimonotone and having high order of accuracy for some equations and system.