TẠP CHÍ KHOA HỌC TÍNH TOÁN VÀ ĐIỀU KHIỂN Tập VI (1990), Số 1 (4 - 11)

GIẢI BÀI TOÁN CARLEMAN SUY RỘNG TRÊN TRỤC THỰC BẰNG PHƯƠNG PHÁP CHIẾU LẶP TRÊN CƠ SỞ PHÉP CHIẾU BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

LÊ XUÂN QUẢNG

I - ĐẶT VẤN ĐỀ

Chúng ta nghiên cứu bài toán biên sau đây: Tìm các hàm giải tích $F^+(z)$, $F^-(z)$ tương ứng trong nửa mặt phẳng trên D^+ (dưới D^-) sao cho các giá trị biên của chúng trên trục thực $F^{\pm}(t)$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$(KF)(t) = A(t)F^+(t) + B(t)F^+(-t) + C(t)F^-(t) = h(t), \; t \in R \tag{1.1}$$

Trong đó $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $h(t)$ là các hàm cho trước trên trục thực thỏa mãn các giả thiết sau:

$$A(t),\; B(t),\; C(t) \in H_\lambda; \quad h(t) \in H_\lambda \cap \tilde{L}_{2,\rho} \tag{1.2}$$

$$\rho = \frac{1}{1+t^2}; \; t \in R \quad (\tilde{L}_{2,\rho} \text{ sẽ định nghĩa sau})$$

Nếu ta xét hàm $\alpha(t) \equiv -t$ thì $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$, $\alpha'(t) = -1 \neq 0$, thỏa mãn điều kiện Carleman nên bài toán (1.1) gọi là bài toán Carleman suy rộng.

Nếu giả thiết

$$Ind\,\Delta(t) = Ind\,(A(-t) \times C(t)) = 0 \tag{1.3}$$

thì bài toán (1.1) có nghiệm duy nhất thuộc $H_\lambda \cap \tilde{L}_{2,\rho}$.

Bài toán (1.1) có rất nhiều ứng dụng trong việc giải các bài toán đàn hồi, bài toán gián các mặt và lý thuyết phương trình tích phân kỳ dị (xem [3]) do vậy được rất nhiều nhà toán học, cơ học quan tâm. Cho đến nay vấn đề định tính của bài toán (1.1) đã được nghiên cứu khá hoàn chỉnh (xem [3]). Còn vấn đề giải gần đúng bài toán (1.1) mới đặt ra trong những năm gần đây được trình bày trong công trình [5].

Trong công trình [5] đã đưa ra hai phương pháp trực tiếp giải gần đúng bài toán (1.1) là phương pháp bình phương tối thiểu và phương pháp Bubnov-Galekin. Mục đích của chúng ta ở đây là áp dụng phương pháp chiếu lặp cho bài toán (1.1). Phương pháp đó cho phép chúng ta nâng cao tốc độ hội tụ so với các phương pháp trên.

Trước hết ta đưa vào các không gian sau:

H_λ là không gian Holder trên trục thực với chỉ số λ gồm các hàm $f(t)$; $t \in R$ thỏa mãn $f \in C(-\infty, \infty)$

a) $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} f(t) < \infty$;

b) $\forall t_1, t_2 \in [-\Delta, \Delta]$, $\Delta > 0$, $\Delta < \infty$ thì

$$|f(t_1) - f(t_2)| \le M|t_1 - t_2|^\lambda,\ M = const;$$

c) $\forall t_1, t_2 \in (-\infty, \infty) \setminus [-\Delta, \Delta]$ thì

$$|f(t_1) - f(t_2)| \le M\left|\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right|^\lambda;$$

$$\tilde{L}_{2,\rho} = \{x(t) \in L_{2,\rho},\ x(-\infty) = x(+\infty) < \infty\},$$

$\tilde{W}L_{2,\rho}$ là không gian các hàm $\varphi(z)$ giải tích tương ứng trong D^+ và D^-, sao cho các giá trị biên biên của nó trên trục thực

$$\varphi^\pm(t) \in \tilde{L}_{2,\rho} \cap H_\lambda,\ \varphi(\infty) = 0$$

với chuẩn

$$\|\varphi\|_{\tilde{W}L_{2,\rho}} = \|\varphi^+\|_{L_{2,\rho}} + \|\varphi^-\|_{L_{2,\rho}}.$$

Không gian $\tilde{W}L_{2,\rho}$ với chuẩn đó là không gian Banăc.

X là không gian được định nghĩa như sau:

$$X = \{x(t) = \varphi^+(t) - \varphi^-(t);\ \varphi^\pm(t) \text{ là giá trị biên hàm } \varphi(z) \in \tilde{W}L_{2,\rho}\}.$$

Nếu trong không gian X ta đưa vào các chuẩn

$$\|x\|_X^1 = \|\varphi^+ - \varphi^-\|_{L_{2,\rho}}, \tag{1.4}$$

$$\|x\|_X^2 = \|\varphi^+\|_{L_{2,\rho}} + \|\varphi^-\|_{L_{2,\rho}}, \tag{1.5}$$

thì ta có bổ đề sau:

Bổ đề 1.1. $X \equiv \tilde{L}_{2,\rho} \cap H_\lambda$ và các chuẩn $\|\cdot\|_X^1$, $\|\cdot\|_X^2$ tương đương.

Chứng minh: Giả sử $x(t) \in \tilde{L}_{2,\rho} \cap H_\lambda$ ta thiết lập hàm $\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{\tau - z}d\tau$.

Theo công trình [1], [10] thì $\varphi(z) \in \tilde{W}L_{2,\rho}$ và

$$\varphi^\pm(t) = \pm\frac{x(t)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{\tau - t}d\tau \tag{1.6}$$

Từ (1.6) ta có: $x(t) = \varphi^+(t) - \varphi^-(t)$, hay $x(t) \in X, \Rightarrow \tilde{L}_{2,\rho} \cap H_\lambda \subset X$.

Ngược lại nếu $x(t) \in X \Rightarrow x(t) = \varphi^+(t) - \varphi^-(t)$,

$$\varphi^\pm(t) \in \tilde{L}_{2,\rho} \cap H_\lambda \Rightarrow X \subset \tilde{L}_{2,\rho} \cap H_\lambda.$$

Để chứng minh chuẩn (1.4) và (1.5) tương đương ta chỉ cần sử dụng tính bị chặn của toán tử Côsi

$$(J\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \tag{1.7}$$

trong X và công thức (1.6).

Nhận xét 1.1. Với mọi $x(t) \in X$ thì phân tích $x(t) = \varphi^+(t) - \varphi^-(t)$, $\varphi^\pm(t)$ là giá trị biên của $\varphi(z) \in \tilde{W}L_{2,\rho}$ là duy nhất.

Nhận xét trên suy ra từ bài toán Riman có bước nhảy trong $L_{2,\rho}$.

Bây giờ trong không gian X ta xét phương trình

$$x(t) = (Tx)(t) + h(t)\,,\ t \in R \tag{1.8}$$

trong đó T ánh xạ $X \to X$ theo quy tắc sau:

$$(Tx)(t) = (1 - A(t))F^{+}(t) - B(t)F^{+}(-t) - (1 + C(t))F^{-}(t) \tag{1.9}$$

$$x(t) = F^{+}(t) - F^{-}(t) \tag{1.10}$$

Vì phân tích (1.10) duy nhất do vậy toán tử T có nghĩa. Nếu có các giả thiết (1.2) và (1.3) thì T là toán tử tuyến tính, liên tục trong X.

Định lý 1.1. Bài toán (1.1) giải được trong không gian $\tilde{W}L_{2,\rho}$ khi và chỉ khi phương trình (1.8) giải được trong không gian X và nghiệm của chúng liên quan với nhau bởi đẳng thức

$$x(t) = F^{+}(t) - F^{-}(t) \tag{1.11}$$

Chứng minh : Giả sử $\varphi_*(z) \in \tilde{W}L_{2,\rho}$ là nghiệm bài toán (1.1) có nghĩa là $\varphi_*^{\pm}(t)$ thỏa mãn

$$A(t)\varphi_*^{+}(t) + B(t)\varphi_*^{+}(-t) + C(t)\varphi_*^{-}(t) = h(t)\,,\ t \in R$$

Đặt $x_*(t) = \varphi_*^{+}(t) - \varphi_*^{-}(t)$, khi đó $x_*(t) \in X$, và $(Tx_*)(t) + h(t) = x_*(t)$.

Do vậy $x_*(t)$ là nghiệm (1.8)

Ngược lại giả sử $x_*(t) \in X$ là nghiệm phương trình (1.8), ta thiết lập hàm

$$\varphi_*(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_*(\tau)}{\tau - z}\,d\tau,$$

Khi đó $\varphi_*(z) \in \tilde{W}L_{2,\rho}$ và $x_*(t) = \varphi_*^{+}(t) - \varphi_*^{-}(t)$

Thay $x_*(t)$ vào (1.8) ta được đẳng thức (1.1).

II - PHƯƠNG PHÁP CHIẾU LẶP TRÊN CƠ SỞ PHÉP CHIẾU BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU TRONG KHÔNG GIAN HILBERT [6]

Trong không gian Hilbert H ta xét phương trình

$$u = Tu + f \tag{2.1}$$

trong đó $f \in H$ là phần tử cho trước, $u \in H$ là phần tử phải tìm, T là toán tử tuyến tính liên tục ánh xạ $H \to H$.

Sơ đồ chiếu lặp giải gần đúng phương trình (2.1) như sau:

Từ $u_0 \in H$ cho trước, các phần tử gần đúng tiếp theo được tính theo công thức

$$u_k = f + T(u_{k-1} + w_k) \tag{2.2}$$

trong đó $w_k \in H_0$, H_0 là không gian con của H, và W_k làm cực tiểu phiếm hàm

$$\Phi(w_k) = \|\delta_k - w_k\|_H^2 \tag{2.3}$$

$$\delta_k = u_k - u_{k-1} \tag{2.4}$$

Từ (2.2), (2.3), và (2.4) ta có

$$\Phi(w_k) = \|w_k - Tw_k - \varepsilon_k\|_H^2 \tag{2.5}$$

$$\varepsilon_k = f - u_{k-1} + Tu_{k-1} \tag{2.6}$$

Giả sử $H_0 = H_n$ là không gian hữu hạn chiều tạo bởi hệ n phần tử độc lập tuyến tính

$$\{\varphi_j\}, \quad (j = 1, 2, ..., n)$$

Trong trường hợp đó W_k được tìm dưới dạng

$$w_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\varphi_i, \quad k = 1, 2, ... \tag{2.7}$$

và phiếm hàm Φ có dạng như sau

$$\Phi(w_k) = \Phi(w_{1k}, w_{2k}, ..., w_{nk}) = \|\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\xi_i - \varepsilon_k\|_H^2 \tag{2.8}$$

trong đó

$$\xi_i = \varphi_i - T\varphi_i, \quad i = \overline{1,n} \tag{2.9}$$

Điều kiện để phiếm hàm (2.8) đạt cực tiểu là

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_{ik}} = 0, \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{2.10}$$

Qua một vài biến đổi đơn giản hệ phương trình (2.10) có thể đưa về dạng sau

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}(\xi_i, \xi_j) = (\varepsilon_k, \xi_j), \; j = \overline{1,n} \tag{2.11}$$

Trong đó (ξ_i, ξ_j) là tính vô hướng trong H.

Theo công trình [6] ta có bổ đề sau:

Bổ đề 2.1: Nếu phương trình:

$$v = Tv, \quad \forall v \in H \tag{2.12}$$

chỉ có nghiệm tầm thường thì $\forall n \geq 1$ hệ phương trình (2.11) có nghiệm duy nhất.

III - ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP CHIẾU LẶP CHO PHƯƠNG TRÌNH (1.8)

Trước hết ta xây dựng không gian gần đúng X_n như sau

$$X_n = \{x_n(t) = \varphi_n^+(t) - \varphi_n^-(t)\} \tag{3.1}$$

trong đó

$$\varphi_n^\pm(t) = \pm\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^\pm \varphi_k^\pm(t) \tag{3.2}$$

α_0; $\alpha_k^\pm$, $k = \overline{1,n}$ là các hệ số tự do, còn $\varphi_k^\pm(t)$ được tính như sau

$$\varphi_0 = 1, \; \varphi_k^\pm(t) = (t \pm ik)^{-1}, \; t \in R \tag{3.3}$$

i - là số ảo. Dễ dàng thấy rằng các hàm $\varphi_k^\pm(t)$ thỏa mãn các tính chất sau:

$$\varphi_k^\pm(-t) = -\varphi_k^\mp(t); \; \overline{\varphi_k^+(t)} = \varphi_k^-(t); \; \overline{\varphi_k^-(t)} = \varphi_k^+(t) \tag{3.4}$$

Theo công trình [7] hệ (3.3) là hệ độc lập tuyến tính, đầy đủ trong $L_{2,\rho}$ do vậy đầy đủ trong X.

Hơn thế nữa $\forall x(t) \in X$; $x_n(t) \in X_n$, sao cho/; $\|x_n - x\|^2_{L_{2,\rho}} = \inf_{T_n \in X_n} \|T_n - x\|^2_{L_{2,\rho}}$

thì

$$\|x_n - x\|_{L_{2,\rho}} \leq d\left(\frac{\ln\sigma}{\sigma}\right)^{\lambda} \tag{3.5}$$

Vì chuẩn trong $L_{2,\rho}$ và trong X tương đương theo bổ đề 1.1 do vậy

$$\|x_n - x\|_X \leq d\left(\frac{\ln\sigma}{\sigma}\right)^{\lambda} \tag{3.6}$$

trong đó

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} k(1+k^2)^{-1}$$

d là hằng số không phụ thuộc vào n.

Theo sơ đồ chiếu lặp từ phần tử $x_0(t) = \varphi_0^+(t) - \varphi_0^-(t) \in X$

cho trước, các phần tử gần đúng tiếp theo $x_k(t)$ được tính như sau:

$$x_k(t) = h(t) + T(x_{k-1}(t) + w_k(t) \tag{3.7}$$

trong đó

$$w_k(t) = w_k^+(t) - w_k^-(t) \tag{3.8}$$

$$w_k^{\pm}(t) = \pm\alpha_{k0} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}^{\pm}\varphi_i^{\pm}(t) \tag{3.9}$$

Các hệ số' α_{k0}, $\alpha_{ki}^{\pm}$ $(k = \overline{1,n})$ được xác định từ điều kiện cực tiểu hóa phiếm hàm

$$\Phi(\alpha_{k0}, \alpha_{k1}^{\pm}, \ldots, \alpha_{kn}^{\pm}) = \|w_k - Tw_k - \varepsilon_k\|_X^2 \tag{3.10}$$

$$\varepsilon_k(t) = h(t) - x_{k-1} + (Tx_{k-1})(t) \tag{3.11}$$

Từ điều kiện cực tiểu hóa phiếm hàm (3.10) ta thu được hệ phương trình đại số sau đây

$$\begin{cases} \alpha_{k0}a_{k00} + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ki}^{+}a_{ki0} + \alpha_{ki}^{-}b_{ki0} & = h_{k0} \\ \alpha_{k0}a_{k0j}^{\pm} + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ki}^{+}a_{kij}^{\pm} + \alpha_{ki}^{-}b_{kij}^{\pm} & = h_{kj} \end{cases} \tag{3.12}$$

$$j = \overline{1,n} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Ở đây

$$\begin{aligned}
&a_{k00} = (A+B-C, \overline{A+B-C}); \quad a_{ki0} = (A\varphi_i^+ - B\varphi_i^-, \overline{A+B+C});\\
&b_{ki0} = (A+B-C, C\varphi_i^-); a_{k0j} = (A+B-C, A\varphi_j^+ - B\varphi_j^-);\\
&a_{kij}^{+} = (A\varphi_i^+ - B\varphi_i^-, A\varphi_j^+ - B\varphi_j^-); \quad b_{kij}^{+} = (C\varphi_i^-, A\varphi_j^+ - B\varphi_j^-);\\
&h_{k0} = (\varepsilon_k, \overline{A+B-C}); \quad h_{kj}^{+} = (\varepsilon_k, A\varphi_j^+ - B\varphi_j^-);\\
&a_{k0j}^{-} = (A+B-C, \overline{C\varphi_j^-}); \quad b_{kij}^{-} = (C\varphi_i^-, C\varphi_j^-);\\
&a_{kij}^{-} = (a\varphi_i^+ - B\varphi_i^-, \overline{C\varphi_j^-}); \quad h_{kj}^{-} = (\varepsilon_k, \overline{C\varphi_j^-})
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Tích vô hướng trong $\tilde{L}_{2,\rho}$ được xác định theo công thức

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)g(t)}{1+t^2}dt; \quad f,g \in \tilde{L}_{2,\rho} \tag{3.14}$$

Bổ đề 3.1. Nếu giả thiết (1.2), (1.3) thỏa mãn thì hệ phương trình (3.12) có nghiệm duy nhất với mọi n đồng thời ta có đánh giá

$$\|w_k(t) - w_k^{(n)}(t)\|_X \le d_1 \left(\frac{\ln\sigma}{\sigma}\right)^\lambda \tag{3.15}$$

Trong đó d_1 là hằng số không phụ thuộc n, $W_k^{(n)}(t)$ được tính theo công thức (3.9) với $\alpha_0, \alpha_k^{\pm}$ ($k = 1, 2, ..., n$) là nghiệm của hệ phương trình (3.12) và W_k là nghiệm của phương trình

$$w_k(t) - (Tw_k)(t) = \varepsilon_k(t) \tag{3.16}$$

Chứng minh: Giả thiết (1.2), (1.3) thỏa mãn có nghĩa là

$$A(t), B(t), C(t) \in H_\lambda\,,\ 0 < \lambda < 1\,, \text{và } Ind\Delta(t) = 0\,,$$

suy ra bài toán (1.1) giải chuẩn có nghiệm duy nhất trong $\tilde{W}L_{2,\rho}$. Như vậy theo định lý 1.1 phương trình (1.8) giải chuẩn có nghiệm duy nhất trong X. Điều đó suy ra phương trình $v = Tv$ chỉ có nghiệm tầm thường. Vậy theo bổ đề 2.1 thì hệ (3.12) có nghiệm duy nhất với mọi n. Mặt khác vì phương trình (1.8) có nghiệm duy nhất nên $(I - T)^{-1}$ tồn tại và bị chặn đồng thời $\varepsilon_k \in X$. Hơn thế theo [5] ta có

$$\|W_k^{(n)}(t) - W_k(t)\|_X \le d_1 \left(\frac{\ln\sigma}{\sigma}\right)^\lambda\,,\ t \in R \tag{3.17}$$

trong đó d_1 không phụ thuộc vào n.

Định lý 3.1. Nếu thỏa mãn giả thiết (1.2), (1.3) thì $\exists n_0 \ge 1$ sao cho $\forall n \ge n_0$ phương pháp chiếu lặp (3.8), (3.9) đối với phương trình (1.8) hội tụ theo nghĩa

$$\lim_{k\to\infty} \|\varepsilon_{k+1}(t)\|_X = 0 \tag{3.18}$$

đồng thời ta có đánh giá

$$\|\varepsilon_{k+1}(t)\|_X \le q^k \|\varepsilon_0(t)\|_X\,;\ \varepsilon_0(t) = h(t) - x_0(t) + Tx_0(t) \tag{3.19}$$

$0 < q < 1$ là hằng số không phụ thuộc vào k, cụ thể là

$$q = d_2\|T\|\|I - T\| \left(\frac{\ln\sigma}{\sigma}\right)^\lambda \tag{3.20}$$

Chứng minh: Theo giả thiết định lý và kết quả của bổ đề 3.1 thì hệ phương trình (3.12) giải chuẩn có nghiệm duy nhất với mọi n, do vậy tồn tại toán tử tuyến tính R_n để

$$w_k^{(n)}(t) = R_n\varepsilon_k(t) \tag{3.21}$$

trong đó $w_k^{(n)}(t)$ tính theo công thức (3.9) có các hệ số $\alpha_{k0}, \alpha_{ki}^{\pm}$ $(i = \overline{1, n})$ thỏa mãn hệ (3.12).

Nếu ta ký hiệu $w_k(t) = (I - T)^{-1}\varepsilon_k(t)$ ($(I - T)^{-1}$ tồn tại theo giả thiết định lý và định lý 1.1 thì theo bổ đề 3.1 ta có

$$\|w_k^{(n)} - w_k\|_X = \|R_n\varepsilon_k - (I - T)^{-1}\varepsilon_k\|_X \le d_1 \left(\frac{\ln\sigma}{\sigma}\right)^\lambda,$$

(d_1 không phụ thuộc vào n và k) hay

$$\|(I - T)^{-1}(R_n - TR_n - I)\varepsilon_k\|_X \le d_1 \left(\frac{\ln\sigma}{\sigma}\right)^\lambda \tag{3.22}$$

Mặt khác từ các công thức (3.11) và (3.7) ta có

$$\begin{aligned}\varepsilon_{k+1}(t) &= T(\varepsilon_k(t) - R_n\varepsilon_k(t) + TR_n\varepsilon_k(t)) \\ &= -T(I - T)(I - T)^{-1}(R_n - TR_n - I)\varepsilon_k(t)\end{aligned} \tag{3.23}$$

Từ (3.23) suy ra

$$\|\varepsilon_{k+1}(t)\|_X \leq \|T\|\|I-T\|\|(I-T)^{-1}(R_n - TR_n - I)\|\|\varepsilon_k(t)\|_X$$

Sử dụng (3.22) ta có $\|\varepsilon_{k+1}(t)\|_X \leq d_2\|T\|\|I-T\|\left(\frac{\ln\sigma}{\sigma}\right)^{\lambda}\|\varepsilon_k(t)\|_X$

Đặt

$$q = d_2\|T\|\|I-T\|\left(\frac{\ln\sigma}{\sigma}\right)^{\lambda}$$

và từ công thức truy chứng ta nhận được

$$\|\varepsilon_{k+1}(t)\|_X \leq q^k\|\varepsilon_0(t)\|_X \tag{3.24}$$

Do (3.6) nên $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\ln\sigma}{\sigma}\right)^{\lambda} = 0$. Vì vậy $\exists n_0 > 1$, khi $n > n_0$ ta có $q < 1$.

Cụ thể ta chọn n_0 sao cho

$$\left(\frac{\ln\sigma}{\sigma}\right)^{\lambda} < \frac{1}{d_2\|T\|\|I-T\|} \tag{3.25}$$

IV - ÁP DỤNG

Sơ đồ chiếu lặp giải phương trình (1.8) có nghĩa là bài toán (1.1). Có thể áp dụng cho các dạng phương trình tích phân kỳ dị thường gặp trong lý thuyết đàn hồi như sau:

$$f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}[k(x-t) + n(x+t)]f(t)dt = h(t)\,,\ x \geq 0 \tag{4.1}$$

Theo công trình [5] phương trình (4.1) có thể dẫn về bài toán sau

$$F^+(x)[1+K(x)] + N(x)F^+(-x) - F^-(x) = H(x) \tag{4.2}$$

trong đó $K(x), N(x), H(x), F^{\pm}(x)$ là biến đổi Fourie tương ứng của các hàm $k(x), n(x), f_{\pm}(x)$

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ 0\,, & x \leq 0 \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} 0\,, & x \geq 0 \\ -f(x), & x \leq 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Nếu ta giả thiết $K(x), N(x), H(x) \in L_{2,\rho} \cap H_{\lambda}$, $0 < \lambda < 1$, và $1 + K(x) \neq 0$,

$\chi = Ind[1 + K(x)] = 0$ thì bài toán (4.2) có nghiệm duy nhất $\in \tilde{L}_{2,\rho} \cap H_{\lambda}$.

Nếu ta ký hiệu $X \equiv \tilde{L}_{2,\rho} \cap H_{\lambda}$ thì $\forall x \in X$ có phân tích duy nhất

$$x(t) = F^+(t) - F^-(t)\,,\ t \in R \tag{4.4}$$

và ta chuyển bài toán (4.2) về phương trình

$$x(t) = (Tx)(t) + H(t)\,,\ t \in R \tag{4.5}$$

với

$$x(t) = F^+(t) - F^-(t) \in X$$

$$(Tx)(t) = K(t)F^+(t) - N(t)F^+(-t) + H(t) \tag{4.6}$$

$T : X \to$ X liên tục tuyến tính, và có thể áp dụng phương pháp chiếu lặp cho phương trình (4.6).

2) Theo công trình [5] phương trình tích phân sau cùng có nhiều ứng dụng trong lý thuyết đàn hồi

$$\lambda f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty [k_1(x-t) + k_2(x+t)] f(t) dt + \nu f(x)$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty [k_3(x-t) + k_4(x+t)] \overline{f}(t) dt = h(t)\,,\ x \geq 0 \tag{4.7}$$

Dùng biến đổi Fourie có thể đưa phương trình (4.7) về bài toán sau

$$[\lambda + k_1(x)] F^+(x) + K_2(x) F^+(-x) + [\nu + K_3(x)] \overline{F^+(-x)}$$
$$+ K_4(x) \overline{F^+(x)} - F^-(x) = H(x)\,,\ x \geq 0 \tag{4.8}$$

λ, ν là hằng số. Nếu $K_1(x), K_2(x), K_3(x), K_4(x) \in H_\lambda$, $0 < \lambda < 1$, $H(x) \in H_\lambda \cap \tilde{L}_{2,\rho}$ và nếu có các điều kiện

$$\Delta(x) - [\lambda + K_1(x)][\tilde{\lambda} + \overline{K_1(-x)}] - [\nu + K_3(x)][\tilde{\nu} - K_3(-x)] \neq 0$$

$Ind\Delta(x) = 0$ thì bài toán (4.8) có nghiệm duy nhất thuộc $X \equiv H_\lambda \cap L_{2,\rho}$

Do vậy ta có thể áp dụng phương pháp trên để giải gần đúng nó. Bài toán (4.1) và (4.7) đã được giải bằng phương pháp chiếu bình phương tối thiểu và phương pháp Bubnov-Galekin (xem [5]) .Các phương pháp trong [5] chỉ cho tốc độ hội tụ bậc $(\ln\sigma/\sigma)^\lambda$. Nếu áp dụng phương pháp chiếu lặp (3.8), (3.9) thì chúng tôi nhận được tốc độ hội tụ bậc cao hơn cụ thể là $[(\ln\sigma/\sigma)^\lambda]^k$ trong đó k là số bước lặp.

Nhận ngày 1 - 1 - 1990

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Гахов Ф. Д., Краевые задачи. М.: Наука, 1977, 604 с.

2. Касьянов В. И., Канд. диссертация. Казань, 1983.

3. Литвинчук Г. С., Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977, 448 с.

4. Иванов В. В., Теория приближенных методов и её применения к численному решению сингулярны х интегральных уравнений. Киев: Наукова думка, 1968, 228 с.

5. Гибния к Л. Н., Тихоненко Н. Я, К приближенному решению одной трехелементной краевой задачи со сдвигом и её применения. У. М. Н., Т. 38, N^o6, 1986.

6. Лучка А. Ю., Проекционные - итеративные методы решения дифференциальных и интеграл ьхых уравнений. Киев: Наукова думка, 1980, 218 с.

7. Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппрокцимаций. М.: Наука, 1965, 382 с.

8. Беркович Ф. Д., Об одном интегральном уравнении на полуоси. Изв. ВУЗОВ, Математика6, 1966, N^o 1.

9. Баблоян А. А. О двух интегральных уравнениях, встречающихся в теории упругости. Изв. АН Арм» ССР, Механика6, 1966, N^o 1.

10. Хведелизе Б. В., Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной. В кн.: "Современные проблемы математики", Т. 7, 1975.

ABSTRACT

In this paper the projection iterative method is used for solving the generalized Carlemam problem

$$A(t)F^+(t) + B(t)F^+(-t) + C(t)F^-(t) = h(t),\ t \in R$$

Where R is the real axis; $A(t), B(t), C(t)$ are Holder continuous functions; $h(t) \in L_{2,\frac{1}{1+t^2}}$ and $F^+(t), (F^-(t))$ is a boundary value of analytic function upper (lower) half-plane.